"Annali online della Didattica e della Formazione Docente"
Vol. 9, n. 14/2017, pp. 127-145 – ISSN 2038-1034

Difficoltà nell'applicazione di metodologie cooperative per l'insegnamento della Matematica nella scuola secondaria di II grado.

Alcune riflessioni sullo sviluppo dei processi argomentativi

Alessandro Spagnuolo

Abstract – *The aim of this paper is to point out the specific difficulties observed during the implementation of peer education teaching units of mathematics in some language section classes of secondary schools of Ferrara (Italy). Over the past five years, some experimental studies on the teaching of mathematics have been carried out in Ferrara with the aim of verifying whether it is possible to successfully implement such methodologies in the Italian educational context, and particularly at the higher education level. However, the positive perceptions observed among students and teachers involved in the study and the related motivational and affective aspects, must not detract attention from certain problematic situations that may arise during the teaching process. This paper will outline some of the interaction protocols among students, in which it is possible to identify the difficulties associated with the use of specific linguistic constructs and the resulting insecurity in mathematical discussions. The analysis of the aforementioned critical issues and the elaboration of corrective actions aim to preserve the benefits of using these methodologies, avoiding the use by students of irrational practices and mechanical resolution processes disconnected from a real understanding of mathematical concepts in the field.*

Riassunto – *L'obiettivo di questo articolo è di evidenziare delle specifiche difficoltà riscontrate in seguito alla realizzazione di unità didattiche sulle funzioni lineari in modalità peer education in alcune classi di licei linguistici di Ferrara. Negli ultimi cinque anni sono state portate avanti a Ferrara alcune indagini sperimentali per l'insegnamento della matematica con il fine di verificare se anche nel contesto educativo italiano, e in particolar modo a livello di scuola secondaria di II grado, sia possibile implementare con successo tali metodologie. Le percezioni positive rilevate tra gli studenti e gli insegnanti coinvolti in merito all'innovatività delle metodologie utilizzate e agli aspetti motivazionali e affettivi ad esse connesse non devono però distogliere l'attenzione da determinate situazioni problematiche che possono crearsi lungo il percorso didattico. In questo lavoro verranno illustrati alcuni dei protocolli di interazione tra gli studenti in cui è possibile individuare le difficoltà legate all'uso di specifici costrutti linguistici e la conseguente insicurezza generata all'interno delle discussioni matematiche. L'analisi delle suddette criticità e la relativa elaborazione di interventi aggiustativi mirano a preservare i vantaggi dovuti all'utilizzo di queste metodologie, evitando l'uso da parte degli studenti di prassi irrazionali e di procedimenti risolutivi meccanici sconnessi da una reale comprensione dei concetti matematici in campo.*

Keywords – mathematics education, peer education, linear functions, linguistic constructs, argumentation competences

Parole chiave – didattica della matematica, apprendimento cooperativo, funzioni lineari, costrutti linguistici, processi argomentativi

Alessandro Spagnuolo è Dottore di Ricerca in Matematica e Professore a contratto per il corso di *Esercitazioni di Matematica Applicata* della laurea magistrale in Architettura dell'Università di Ferrara. I suoi interessi di ricerca si collocano nell'ambito della didattica della matematica, in particolare sull'implementazione di strategie cooperative per l'insegnamento della matematica. Si segnala la sua tesi di dottorato *The effects of the equality parameter on mathematics students' performance. A comparative analysis of Peer Education interventions in teaching-learning of linear and quadratic functions* (Ferrara, 2017).

1. Applicazione delle metodologie cooperative: la situazione italiana

In Italia il modello pedagogico al quale si ispirano tradizionalmente gli insegnanti per organizzare le lezioni si basa su una impostazione trasmissiva di tipo unidirezionale. Come analizzato in Spagnuolo (2017), l'ultima indagine dell'istituto IARD sulle condizioni di vita e di lavoro nella scuola italiana ha mostrato come la percentuale di docenti che adottano delle strategie di didattica esperienziale siano decisamente basse (Cavalli e Argentin, 2010). Differenziando il corpo docente per materie insegnate si ritrova che nelle discipline scientifiche gli insegnanti con un profilo '*innovatore coraggioso*' – vale a dire coloro che prediligono lezioni interattive e attività esperienziali come quelle di cooperative learning – risultano essere solo il 19,1% del campione (*ibidem*, tabella p. 148). Non vi sono dati specifici inerenti il solo insegnamento della matematica, ma si può facilmente immaginare che la percentuale sia ancora più esigua. Quali possono essere le ragioni di tali scelte didattiche? Vi sono molti docenti che non sono a conoscenza di queste metodologie e che non hanno mai effettuato un corso di formazione al riguardo, per cui non hanno neanche la possibilità di sceglierle. Nella precedente indagine IARD del 2000 Giovannini suggeriva che i docenti che hanno vissuto in prima persona esperienze di didattica partecipata tendono poi a riproporla ai loro alunni. Allo stesso modo, gli insegnanti più giovani che hanno frequentato le SSIS e il TFA sono più propensi ad utilizzare forme di didattica basate sulla costruzione condivisa di conoscenza. Tali congetture sono state effettivamente indagate in svariate indagini internazionali (Baines *et al.*, 2008; Gillies and Boyle, 2010; Thanh, 2011). In particolare, Saborit *et al.* (2016) hanno provato l'esistenza di una correlazione negativa tra gli anni di esperienza di insegnamento e l'attitudine dei docenti ad implementare metodologie cooperative. Sembrerebbe quindi che i docenti più giovani siano più disposti ad utilizzare tali strategie didattiche.

Per quanto riguarda la ricerca in Italia sull'implementazione di queste metodologie per l'apprendimento della matematica nella scuola secondaria di secondo grado i risultati finora raggiunti sono abbastanza limitati, seppur promettenti, e risalgono ad un tempo recente (Baldrighi *et al.*, 2003; Faggiano, 2005; Pesci, 2011; Pesci *et al.*, 2015). Oltre alla limitatezza dei dati a disposizione, gli esiti finora raggiunti sono spesso solo di tipo qualitativo e non consentono di trarre conclusioni sull'effettivo miglioramento del rendimento degli studenti derivante dalla loro applicazione. Restano pertanto aperte ancora numerose questioni da indagare.

2. Cos'è la peer education?

In primo luogo vorremmo chiarire cosa si intende in questo articolo con il termine *peer education*. Nel passaggio dalla lingua inglese alla lingua italiana si tende spesso a utilizzare l'espressione *cooperative learning* per racchiudere l'insieme di tutte le pratiche didattiche basate sull'interazione tra pari attraverso la traduzione letterale '*apprendimento cooperativo*'. Al contrario tale insieme viene qui indicato mediante l'uso del vocabolo peer education, laddove con il termine cooperative learning si indica invece una specifica modalità caratterizzata da elementi peculiari che, pertanto, la rendono distinta da altre possibili strutture interattive (Damon e Phelps, 1989; Johnson *et al.*, 1996; Serrano *et al.*, 2008).

Alla luce di questa varietà di accezioni - presente soprattutto nei lavori italiani - si è cercato di uniformare il linguaggio rispetto alle considerazioni precedenti. In generale, a meno di opportune segnalazioni, è stata adottata la distinzione realizzata da Damon e Phelps (1989), i quali identificano tre approcci prioritari nella peer education: *peer tutoring*, *cooperative learning* e *peer collaboration*. In definitiva, vale la seguente relazione:

$$p_t\ , c_l\ , p_c\ \in P_e$$

p_t (peer tutoring), c_l (cooperative learning) e p_c (peer collaboration) appartengono all'insieme P_e (peer education) di tutte le pratiche didattiche di interazione tra pari

La modalità di peer tutoring presume l'assegnazione dei ruoli di tutori e di tutorandi, laddove si intende generalmente che i primi siano studenti aventi una maggiore padronanza della materia rispetto ai secondi. Vi è quindi una sostanziale differenza di status all'interno del gruppo, quasi a voler ricreare una situazione tradizionale di insegnante-studente con le dovute precisazioni: probabili mancanza di autorità e di piena conoscenza della disciplina da parte dei tutori ma, al tempo stesso, vicinanza emotiva con i tutorandi.

Il cooperative learning, come precisato precedentemente, racchiude tutte quelle forme di peer education caratterizzate generalmente dalla presenza di studenti eterogenei per competenze, in cui non è esplicitamente riconosciuto uno status differente tra i membri di un gruppo. L'organizzazione del lavoro può prevedere la suddivisione dei compiti tra i vari studenti o l'obbligo di occuparsi tutti insieme di una specifica attività.

Nella peer collaboration i gruppi sono formati in maniera tale che gli studenti abbiano circa gli stessi livelli di competenza e, a differenza del cooperative learning, essi sono chiamati a lavorare in ogni momento congiuntamente sullo stesso problema piuttosto che singolarmente su componenti separate. Nella sua forma originale questa modalità prevede che gli studenti lavorino insieme per risolvere compiti di apprendimento stimolanti che difficilmente riuscirebbero a risolvere da soli.

Posta questa dovuta precisazione, entriamo nel merito della questione. Parlando in generale di metodologie didattiche basate sull'interazione tra pari occorre distinguere le attività qui proposte dai generici lavori di gruppo. Secondo Comoglio (1996), una prima definizione di peer education può essere data nel seguente modo: "*un insieme di tecniche di conduzione della classe nelle quali gli studenti lavorano in piccoli gruppi per attività di apprendimento e ricevono valutazioni in base ai risultati conseguiti*". Non sarebbe però corretto identificare una situazione di peer education ogni qualvolta si formino dei lavori di gruppo in classe e si dica agli studenti di lavorare insieme su un dato compito. Secondo lo psicologo tedesco Lewin, "the essence of a group is not the similarity or dissimilarity of its members, but their interdependence… A change in the state of any subpart changes the state of any other subpart… Every move of one member will, relatively speaking, deeply affect the other members, and the state of the group" (1948, pp. 84-88). Ogni gruppo, pertanto, è caratterizzato da una propria *interdipendence*, vale a dire da una relazione di dipendenza reciproca tra i membri del gruppo in vista della realizzazione di uno scopo. Ebbene, ciò che contraddistingue un'attività di apprendimento tra pari è proprio la presenza di una interdipendenza di carattere positivo, la quale viene a crearsi nel momento in cui ogni membro percepisce di essere vincolato agli altri compagni come parte indispensabile per il raggiungimento di un obiettivo – *psychological group membership* – e si prodiga per il suo conseguimento – *sociological group membership* (Deutsch, 1949). Una volta raggiunto il proposito prestabilito, non è più possibile attribuire a una persona sola quanto è stato realizzato, ma sarà riconosciuto inequivocabilmente come un prodotto del gruppo (Deutsch, 1962). Gli studi successivi di Lew, Mesch *et al.* (1986) hanno dimostrato effettivamente che "group membership and interpersonal interaction among students do not produce higher achievement unless positive interdependence is clearly structured" (Johnson and Johnson, 1996, p. 793). Tale differenza in termini di efficacia viene altresì rappresentata graficamente da Johnson et al. mediante la curva di prestazione di un gruppo (Johnson *et al.*, 1996, p. 24).

Nel contesto appena descritto l'insegnante riveste un ruolo fondamentale come facilitatore e organizzatore dei processi di apprendimento, la cui responsabilità, però, si trasferisce gradualmente nelle mani degli studenti. Il docente non rappresenta più l'unico punto di riferimento né l'unica fonte di conoscenza, ma assume il compito di attivare, organizzare e responsabilizzare gli studenti verso questo nuovo tipo di lavoro. Nello specifico, i compiti dell'insegnante possono essere circoscritti a quattro azioni principali: la progettazione dell'attività, la gestione del contesto di apprendimento, la valutazione delle competenze e del lavoro di gruppo, e infine il consolidamento e la valutazione a livello individuale delle competenze cognitive sviluppate (Cacciamani, 2008).

La programmazione di un intervento didattico cooperativo deve quindi tenere ben presente questi fattori, così come gli aspetti teorici ed epistemologici caratteristici della disciplina oggetto di studio.

3. Le ricerche sperimentali sulla peer education

Non di rado si pensa ai lavori di gruppo come ad una possibile fonte di distrazione o, nel peggiore dei casi, ad un incentivo verso atteggiamenti e attività antisociali tra gli studenti (Damon, 1984). In realtà, ricerche condotte nel campo psicologico ed educativo hanno ormai mostrato i benefici che una corretta attuazione di un lavoro di interazione tra pari possa apportare allo sviluppo cognitivo di questi (Dansereau, 1985; Webb, 1985), ma anche sulle loro motivazioni e relazioni sociali (Slavin, 1990; Baldrighi *et al.*, 2007). Naturalmente risultati significativi sono riscontrabili solo dopo un'attenta e costante implementazione, la quale il più delle volte può arrivare anche ad occupare un anno di lavoro, lungo un cammino mai privo di insidie e possibili fallimenti (Carletti e Varani, 2005).

A onor del vero è opportuno ricordare come fino agli anni '80 del secolo scorso non tutti i risultati sperimentali mostravano degli effetti positivi sull'apprendimento derivanti dall'utilizzo di metodologie cooperative. Secondo Webb (1983) questa ambiguità era dovuta proprio al fatto che non tutti i tipi di interazione garantiscono l'acquisizione di conoscenza. Le ambiguità riscontrate agli inizi degli anni '80 sono state definitivamente acclarate in seguito alla realizzazione di numerose metanalisi, di cui ricordiamo soprattutto quelle svolte dal gruppo di ricerca del Cooperative Learning Center dell'Università del Minnesota coordinato dai fratelli Johnson (Johnson *et al.*, 1981; Johnson and Johnson, 1987; Johnson *et al.*, 1983, Johnson and Johnson, 1989). Questi studi hanno definitivamente dimostrato la superiorità delle metodologie cooperative in ambito educativo rispetto a quelle competitive e individualiste, laddove nelle prime gli studenti lavorano in competizione tra loro per ottenere delle valutazioni migliori rispetto a quelli dei compagni, mentre nelle seconde l'acquisizione di conoscenza avviene singolarmente e indipendentemente dalle performance degli altri (Johnson *et al.*, 1996). I risultati ottenuti possono essere così riassunti: "le situazioni cooperative sono sempre superiori a quelle competitive e individualiste, sia nel caso in cui si considerino queste in una forma pura sia considerando casi in cui si mescolino cooperazione e competizione all'interno o tra i gruppi; inoltre, non si constatano mai differenze significative tra le situazioni di competizione e quelle individualiste"[1] (Serrano *et al.*, 2008, pp. 116-117).

Alla luce delle conclusioni raggiunte da questa prima generazione di studi, i nuovi interessi di ricerca si sono suddivisi lungo quattro aree specifiche inerenti le dinamiche interne ai metodi di apprendimento cooperativo, la formazione degli insegnanti, come si apprende a cooperare e l'uso della peer education in aree specifiche del curricolo. Per quanto concerne il caso specifico dell'insegnamento-apprendimento della matematica, le prime ricerche sull'applicazione di metodologie cooperative in quest'area disciplinare non hanno mostrato in generale dei risultati significativi nell'apprendimento di concetti matematici e nello sviluppo di metodi di risoluzione di problemi (Davidson, 1979; Weissglass, 1979). Nonostante questo, nei casi di attività incentrate sull'uso di abilità basiche quali il calcolo, la comprensione di semplici concetti e la risoluzione di problemi elementari, i metodi che producevano dei risultati significativi erano quelli che prevedevano delle forme di motivazione estrinseca, come ad esempio un sistema di valutazione di gruppo basato sulle prestazioni individuali di ogni membro. Tali metodi nello specifico sono il TGT – Teams Games Tournament (De Vries and Slavin, 1978), lo STAD – Student Teams Achievement Divisions (Slavin, 1978) e il TAI – Team Accelerated Instruction (Slavin, 1985) creati da Slavin e dal suo gruppo di ricerca.

[1] Traduzione italiana dallo spagnolo a cura dell'autore.

Per quanto riguarda gli aspetti legati al tipo di interazione da instaurare tra gli alunni, le prime ricerche in questo ambito si sono concentrate soprattutto sulle forme di tutoring, in cui si è osservato che i miglioramenti registrati nel rendimento degli alunni erano quelli legati al verificarsi di spiegazioni dettagliate da parte dei tutori, piuttosto che a semplici risposte affermative o negative in merito alle soluzioni determinate dai tutorandi (Devin-Sheeman, Feldman and Allen, 1976).

Le successive ricerche basate sull'osservazione di *learning groups* hanno poi mostrato come l'interazione tra pari possa contribuire alla formulazione e alla condivisione di rappresentazioni multiple di uno stesso problema o di un'idea (Smith *et al.*, 1981) e allo sviluppo del pensiero critico (Johnson *et al.*, 1991). In seguito agli studi di Webb (1991) sono stati individuati alcuni elementi significativi che influiscono sull'apprendimento della matematica nei *peer-directed small groups*. Fornire spiegazioni dettagliate ad altri studenti migliora fortemente i risultati di apprendimento, così come, al contrario, ricevere solamente dei feedback sintetici o delle risposte corrette senza alcun commento esplicativo provoca addirittura dei peggioramenti. La composizione dei gruppi, le abilità dei singoli studenti, la loro percezione della materia sono tutti fattori che esercitano un'importante influenza sulle interazioni di gruppo.

Le migliorie e gli aggiustamenti apportati dalle ricerche degli ultimi trent'anni hanno definitivamente permesso di dimostrare anche nell'area matematica la supremazia della peer education - qualsiasi sia la forma nella quale si presenti - rispetto alle altre strategie didattiche (Hossain & Tarmizi, 2013; Lehrer & Lesh, 2013; Nunnery, Chappell, & Arnold, 2013; Zakaria *et al.*, 2013).

Alla luce di questi significativi risultati internazionali, negli ultimi cinque anni sono state portate avanti presso il Dipartimento di Matematica e Informatica dell'Università di Ferrara delle ricerche sperimentali sull'insegnamento delle funzioni lineari in modalità cooperativa. Le sperimentazioni sono state svolte in classi prime afferenti a dei Licei Linguistici, indirizzi in cui la matematica non rappresenta una delle discipline caratterizzanti e il cui insegnamento prevede solo tre ore alla settimana. Obiettivo di queste ricerche era quello di disporre di una indagine sui comportamenti adottati da studenti italiani chiamati per la prima volta a impegnarsi all'interno di gruppi di lavoro su argomenti curricolari di matematica (Spagnuolo, 2017). Le percezioni positive rilevate tra gli studenti e gli insegnanti coinvolti in merito all'innovatività delle metodologie utilizzate e agli aspetti motivazionali e affettivi ad esse connesse non devono però distogliere l'attenzione da determinate situazioni problematiche che possono crearsi durante il percorso didattico. Nella prossima sezione analizzeremo alcune delle problematiche riscontrate nello sviluppo di processi argomentativi in situazioni di scoperta.

4. Descrizione dell'attività didattica

Nell'insegnamento-apprendimento della matematica la risoluzione di ostacoli in ambito cognitivo, specie di fronte ad attività di scoperta, passa attraverso la capacità di mettere a fuoco le proprie idee e i propri dubbi sul problema in questione. Fondamentali in questa circostanza risultano essere le capacità di argomentare e di congetturare, le quali possono essere definite in questo modo: *processi eminentemente discorsivi che risultano da un intreccio tra rappresentazioni simboliche (come segni dell'aritmetica e figure geometriche) e attività discorsive su queste, con cui il soggetto dà significato ad enunciati matematici che sono generalmente di tipo misto (segni specifici del linguaggio simbolico proprio della matematica e parole del linguaggio naturale)* (MIUR-UMI-SIS, 2003).

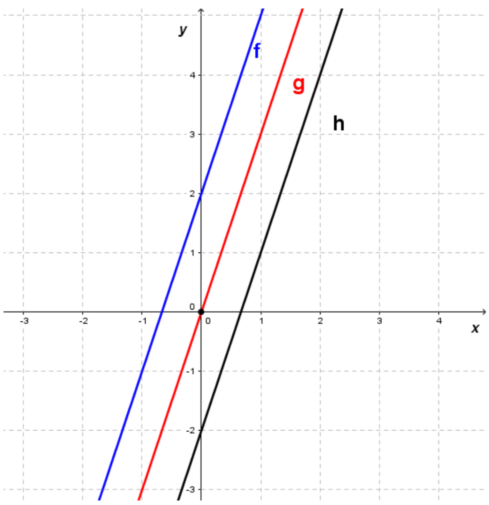
La simbiosi tra l'elaborazione di azioni di tipo cooperativo e lo sviluppo di capacità argomentative rappresenta una componente essenziale nella costruzione comune di conoscenza matematica. Si è pertanto qui considerato ogni atto conoscitivo come "un'attività che coinvolge sempre tutte le componenti delle persone, ad esempio la sensibilità, le emozioni, l'impegno, l'assunzione di rischi, le decisioni, le scelte, le credenze, il rispetto per gli altri" (Pesci, 2003, p. 527), il cui campo di azione si sviluppa all'interno di una '*discussione matematica*' definita come un "purposeful talk on a mathematical subject in which there are genuine pupil contributions and interaction" (Pirie e Schwarzenberger, 1988).

Per questa ragione, nell'elaborazione delle attività didattiche sulle funzioni lineari oggetto di questo studio si è cercato di favorire lo sviluppo dell'argomentazione, la quale verrà analizzata nei protocolli di interazione sulla base dei seguenti costrutti linguistici (Pesci, 2016): a) Il ragionamento per assurdo; b) Il ragionamento condizionale; c) Esempi e controesempi; d) L'utilizzo di più componenti di rappresentazione; e) La presenza di verbalizzazione in strategie risolutive "autonome".

In questo articolo ci soffermeremo in particolare sull'analisi del seguente problema di scoperta relativo al significato geometrico dei coefficienti *m* e *q* di una generica funzione lineare.

1) Sul piano cartesiano sottostante sono riportati i grafici delle funzioni:

- $\boldsymbol{f(x) = 3x + 2}$;
- $\boldsymbol{g(x) = 3x}$;
- $\boldsymbol{h(x) = 3x - 2}$.



Quale coefficiente differisce tra le funzioni? Su cosa e in che modo influisce questo coefficiente sull'andamento del grafico?

Nelle attività precedenti era già stata introdotta la definizione formale di funzione lineare, la sua rappresentazione algebrica del tipo $f(x) = mx + q$ e la sua rappresentazione grafica mediante l'individuazione di due punti sul piano cartesiano. Con questa attività gli studenti erano chiamati ad elaborare alcune congetture in merito all'influenza del coefficiente q sull'andamento dei grafici delle tre rette.

5. Analisi dei protocolli di interazione

In questa sezione verranno illustrati i protocolli di interazione relativi a tre gruppi di studenti che hanno lavorato sul problema prima descritto. I tre gruppi appartengono a classi differenti organizzate secondo diverse modalità cooperative: peer tutoring, cooperative learning e peer collaboration. Nonostante le possibili implicazioni legate all'utilizzo di una specifica modalità, l'analisi di questi dialoghi ha come primo obiettivo quello di individuare le difficoltà caratteristiche dei costrutti linguistici prima citati. La trascrizione ha inizio subito dopo il termine della lettura della traccia.

Caso Peer Tutoring

Modalità		Peer Tutoring
Ruoli		Tutor: Paola; Tutorandi: Rachele e Natalia
1	P.	Quale coefficiente differisce tra le funzioni … Cioè qua … è sempre 3x, ma qua è -2, qua 0 e qua +2 (indica le rappresentazioni algebriche).
2	R.	Però cosa vuol dire?
		(silenzio)
3	P.	Non capisco …
4	R.	Allora aspetta …
5	P.	Cioè forse è questo che cambia …
		(silenzio)
6	P.	Quale coefficiente differisce tra le funzioni? Ah io scrivo +2, 0 e -2. Va bene?
7	P.	(silenzio assenso)
		Su cosa e in che modo influisce questo coefficiente sull'andamento del grafico? Cioè … si spostano sull'asse delle x. Va bene? Cioè, perché uno
8	R.	è qua, uno è qua e uno è qua (indicando il grafico delle tre rette).
		Sì sì.
9	N.	(silenzio, P. trascrive)
10	P.	Non capisco cosa stai dicendo.
		Cioè semplicemente che in base al + 2, al 0 e al -2 si spostano … non so
11	N.	se hai capito … cioè vedi sono tutte parallele.

12	P.	Al +2, 0 e -2?
13	R.	Esatto.
14	P.	Però aspetta un attimo …
		Aspetta un attimo, scusa …
15	P.	(silenzio prolungato)
16	R.	Cioè avete capito perché ho scritto così?
		Sì sì certo però … secondo me non va bene …
17	N.	(silenzio)
18	P.	Cioè tu hai preso questi tre e li hai scritti?
		Sì, cioè vedi che è tutto uguale: 3x, 3x e 3x, tranne +2, 0 e -2 e quindi li ho
		scritti. E che cosa cambia? Che si spostano sull'asse …
19	P.	(silenzio)
		Aspetta un attimo … Forse ho capito …
20	P.	(silenzio)
		+2, 0 e -2 (indica con le dita le intersezioni con l'asse delle y). Passano tut-
		te per … cioè quella che ha +2 passa per +2, quella che ha 0 passa per
21	R.	l'origine e quella che ha -2 passa per -2.
22	P.	E' vero! Sei un genio! Forse è così.
23	R.	Allora si spostano sull'asse delle y … Sì, sull'asse delle y si spostano …
24	P.	Sì, perché sono …
25	R.	Hai capito cosa ho detto?
26	P.	Sì, cioè …
		Quella che ha +2 passa per +2, quella che ha 0 passa per l'origine e quella
27	R.	che ha -2 passa per -2.
28	P.	Bon, ci proviamo, poi vediamo se è giusto.
		Ok.

La mancanza di risposte più o meno elaborate da parte di Rachele e Natalia rispetto alle riflessioni di Paola fa pensare che non vi sia stata una reale comprensione del problema assegnato. Sicuramente le richieste di chiarimenti, implicite o esplicite che siano [2, 9], sono un segnale positivo, in quanto di fronte ad una difficoltà non ci si chiude nel silenzio ma si cerca in un compagno/a una qualche forma di aiuto. Durante queste fasi è tutto il gruppo che ne trae vantaggio, in quanto lo stesso studente avente una strategia risolutiva è chiamato a rispiegare e a rielaborare i suoi pensieri, in modo tale da renderli più chiari ai richiedenti [10, 18]. Pur non sapendo se direttamente o indirettamente, ciò potrebbe anche aver permesso a Paola stessa di perfezionarsi e di trovare una soluzione ancora più precisa della prima data [19, 20]. Dal punto di vista dei costrutti linguistici utilizzati, è possibile riscontrare l'utilizzo da parte di Paola di più componenti di rappresentazione [simbolica 1, 18; testuale 7, 10, 18; grafica 7, 10, 20] e di forme di verbalizzazione 'autonome', come ad esempio il semplice ripetere ad alta voce i quesiti prima di esprimere la propria idea risolutiva [1, 6, 7] o l'utilizzo di domande retoriche [18]. Mancano sicuramente degli esempi di ragionamento per assurdo, di esempi e controesempi diversi dai tre dati (f, g e h) e, soprattutto, di ragionamento condizionale. Non si è riusciti infatti a generalizzare in maniera chiara la rappresentazione grafica del coefficiente q, il quale tra l'altro non è stato mai nominato, ma solo citato attraverso i casi numerici trattati (+2, 0 e -2).

Caso Cooperative Learning

Modalità		Cooperative Learning
Componenti		Vittorio, Ana Maria, Lucia, Giorgia
1	L.	Non credo che influisca in nessun modo visto che le linee vanno tutte nella stessa direzione.
2	A.M.	Vanno tutte nella stessa direzione, ma non sono nello stesso punto.
3	L.	Sì, lo so che non sono nello stesso punto, ci mancherebbe altro.
4	A.M.	E allora cambia.
5	V.	Q… q cambia tra le varie… cose… guarda, prima è +2…
6	L.	Q è sempre uguale.
7	V.	No.
8	L.	Ah giusto, quella è m, giusto.
9	V.	Q è +2, poi dopo qui è 0 …
10	A.M.	Ah, tu dici che mantenendo sempre lo stesso …
11	L.	Coefficiente, cioè lo stesso coefficiente numero uno e coefficiente numero due.
12	A.M.	No dico lo stesso … non so come dire …
13	L.	Aspetta, dice: quale coefficiente differisce, allora intanto la prima risposta è il coefficiente q.
14	A.M.	Ok, allora scrivo: il coefficiente che differisce è q … e influisce su cosa?
15	V.	Nel differire il punto di intersezione della retta con l'asse x e y.
16	A.M.	Come?
17	V.	Nel differire il punto di intersezione della retta con l'asse x e y, tra la retta e gli assi.
18	A.M.	Tra le rette.
19	V.	Tra una retta e gli assi.
20	G.	Non sto capendo niente.
21	A.M.	Aspetta un attimo, fammi finire di scrivere e dopo riproviamo a ragionarci …allora, e influisce… ripeti.
22	V.	Influisce sul punto di intersezione della retta con gli assi x e y.
23	A.M.	Sul punto di intersezione o sui punti? Perché si interseca …
24	V.	Sui punti.
25	L.	Eh son due … però mica tutte le intersecano l'asse y, solo una.
26	V.	Sui punti di intersezione delle rette con gli assi, con gli assi x e y, quindi individua il punto di intersezione tra le rette e gli assi x e y, che può essere uno o due.
27	A.M.	Mah, comunque è giusto dire sui punti di intersezione.

28	L.	Scrivi sui punti di intersezione e non farti problemi. (A.M. scrive)
29	A.M.	Tra l'ascissa e l'ordinata?
30	V.	Tra le rette e l'ascissa e l'ordinata. (L. prova a girare il foglio e A.M. la ferma)
31	A.M.	Aspetta, aspetta, aspetta, cos'è… (rivolta a G.)
32	L.	Cos'è che non avevi capito? Tutto?
33	G.	Qui su q, non ho capito.
34	A.M.	Allora q è la parte … è sempre lo stesso schema, no? Come quello lì: $mx + q$ (indica la lavagna).
35	G.	Aaaa!
36	A.M.	È sempre lo stesso schema soltanto che cambia ...
37	V.	Può esserci $q, mx, mx + q$ (si riferisce ai tre casi possibili di rette)
38	A.M.	È sempre lo stesso stampino che viene ripetuto ogni volta, soltanto che cambia con qualche particolare…
39	G.	Ok.

Una delle situazioni più problematiche che possono verificarsi durante i lavori di gruppo è rappresentata dalla tendenza di uno dei membri ad imporsi a ogni costo sugli altri. Ciò rientra nella casistica di quella che in letteratura viene denominata *deviazione fusionale* (Carletti e Varani, 2005, p. 185). Sin dalle prime battute, infatti, è possibile notare una certa irruenza da parte di Lucia, la quale pretende che la sua affermazione [1] sia accettata dagli altri senza apportare alcuna giustificazione. Il comportamento adottato da Ana Maria sembrerebbe riuscire ad arginare tale intento, anche se Lucia continuerà, seppur in forma ridotta, a seguire la sua condotta [3, 28].

L'analisi delle dinamiche sociali si intreccia fortemente con l'uso dei costrutti linguistici relativi all'argomentazione in matematica. Le risposte puntuali di Ana Maria [2, 4] descrivono un buon esempio di uso del ragionamento condizionale, il quale costituisce un ottimo strumento di contrasto degli atteggiamenti predominanti.

Superata questa prima fase controversa, la discussione continua grazie agli interventi di Vittorio, il cui uso del solo registro verbale [15, 17, 19, 22, 24, 26, 30], non coadiuvato da forme di rappresentazione simbolica e grafica, non facilita la comprensione degli altri compagni [16, 20] (e forse anche di Vittorio stesso), i quali si limitano ad accettare e registrare per iscritto la prima risposta data senza troppe discussioni [21, 28]. Allo stesso tempo, il ripetersi della stessa espressione [15, 17, 22] per illustrare la propria strategia risolutiva non è indice di una piena consapevolezza della tesi sostenuta.

Di positivo c'è sicuramente il tentativo chiarificatore di Ana Maria e Vittorio nei confronti di Giorgia in merito agli oggetti matematici coinvolti, vale a dire i coefficienti *m* e *q* [34, 36, 37, 38]. In queste espressioni è possibile osservare l'uso di rappresentazioni simboliche come sussidi alla spiegazione verbale del quesito in esame. Tuttavia, l'assenza di descrizioni dettagliate da parte di Giorgia [33] e di rielaborazioni delle informazioni ricevute [39] potrebbero rappresentare degli indizi di una parziale comprensione del problema.

Caso Peer Collaboration

Modalità		Peer Collaboration
Componenti		Cesare, Sofia, Gaia, Sara
1	G.	Devo leggerle?
2	SO.	Adesso guardiamo …
3	G.	Allora $f(x) = 3x + 2$ quindi … qual è?
4	S.	Questa (indica sul grafico), quella viola.
5	G.	No, sicura?
6	SO.	È la più scura, cioè a parte (indica la funzione h di color nero) …
7	C.	Sta roba mi sembra già …
8	SO.	La seconda è questa più chiara e la terza è quella nera ... Ah sì, c'è anche scritto f, g e h!
9	SA.	Quindi 3 è sempre m … +2, 0 … o 1? ... +2, 0 e -2 è q.
10	SO.	Sì… qual è la domanda?

In questo gruppo alcuni membri hanno tenuto a illustrare la situazione di partenza ancor prima di leggere la domanda assegnata (si veda la tabella soprastante). Si tratta chiaramente di un esempio di verbalizzazioni atte a esplicitare i significati delle componenti simboliche e grafiche presenti nella traccia. Questo atteggiamento (ahimè non scontato tra gli studenti) rivela un'attenzione particolare verso la lettura del quesito assegnato che, probabilmente, permetterà al gruppo (o perlomeno ai membri coinvolti in questa analisi a priori) di essere più consapevole circa la tesi richiesta.

Modalità		Peer Collaboration
Componenti		Cesare, Sofia, Gaia, Sara
11	G.	Allora quale coefficiente differisce tra le funzioni? Su cosa e in che modo influisce questo coefficiente sull'andamento del grafico?
12	SO.	Quale coefficiente differisce tra le funzioni…
13	C	G (indica il grafico della retta g).
14	SA.	Son tutte diverse invece… la m è 3 (indica le rappresentazioni algebriche sul foglio).
15	G.	Cioè?
16	SO.	Ah è vero!
17	C.	G.
18	G.	Non capisco, non ho capito.

19	SO.	Aspetta (gira il foglio).
20	SA.	I coefficienti sono m e q…
21	SO.	M e q, vero.
22	SA.	M è in tutte le funzioni 3 e q invece cambia, prima è -2, poi 2 …
23	SO.	Nel secondo non c'è, cioè non c'è il coefficiente.
24	SA.	Prima è 2, poi è 0 e poi è -2, quindi quello è…
25	G.	Quindi la g?
26	SA.	Ma perché g?
27	G.	Ma non c'è q?
28	SA.	Il coefficiente, i coefficienti sono solo m e q, questi due, quella è la funzio-
29	G.	ne.
30	C.	Aaa, ah ok… quindi il coefficiente è q. Devi scrivere tu?
31	SO.	Perché? Perché? Cosa state dicendo?
32	G.	Se avessi ascoltato prima mentre stava leggendo lei, magari …
33	C.	Allora, dobbiamo dire qual è il coefficiente che differisce tra le funzioni?
34	SA.	Cos'è un coefficiente?
35	SO.	Il coefficiente è quello che abbiamo letto prima.
36	G.	Esatto, mentre tu stavi guardando la telecamera!
37	SO.	M è quello prima della x, questo qui (indicandolo) e la q è…
38	G.	La q è un numero…
39	C.	Dei numeri reali, no… è un numero razionale.
40	G.	Aaa ok.
		Allora… su cosa e in che modo influisce questo coefficiente
		sull'andamento del grafico?
41	SA.	(silenzio)
42	C.	Allora là viene… il primo è +2… eh, sono sempre minori…
43	SA.	Ah quindi questo è il coefficiente?
44	C.	Sì, quei due lì sono i coefficienti (indicando le formule).
45	SA.	Questa rappresenta cos'è la funzione?
		Il primo pezzo è la funzione, questa riga (intende colonna indicando le rap-
46	SA.	presentazioni algebriche) qua è m e questa è q.
47	SO.	Secondo me è che… qua diminuisce…
48	SA.	Ma rispetto a cosa diminuisce?
49	C.	Prima qui è +2, poi è 0 e poi è - … cioè va sempre di 2!
50	G.	Eh, g differisce, non ha né il +2 né il -2!
51	C.	Ah anch'io pensavo g all'inizio, ma invece dice qual è il coefficiente...
		Aaaaaah il coefficiente!
52	C.	(silenzio)
53	SO.	F e g sono uguali…
54	C.	No, non sono uguali!
		Ma si, una sta + 2 e sta qua, una sta – 2 e sta qua … son tre linee parallele
55	SO.	…
56	SA.	Esatto, son parallele, non sono uguali!
57	C.	-2, 0 e +2 (indicando le intersezioni delle rette con l'asse y).
		Cosa vuol dire, anche se sono piazzate in posizioni diverse, sono uguali…

58	SA.	facci caso.
59	G.	No, secondo me no.
60	C.	Sono parallele, però non sono uguali.
61	G.	Qui c'è scritto…
62	SA.	Ma no! Appunto!
63	C.	Quelle due lì sono…
64	SO.	Passiamo al prossimo esercizio…
65	C.	Noooo, dobbiamo fare solo il primo!
66	SA.	Aaa, solo questo?
67	G.	Finisce lì l'esercizio 1?
		Sì.
68	G.	(silenzio)
		In che modo influisce questo coefficiente… secondo me come ha detto la Sara, che diminuisce sempre di 2… perché qua è vero, qua è vero… (indi-
69	SO.	cando sul grafico)
70	SA.	È vero, è vero hai ragione. Perché… perché… è vero, quindi… Quindi… Questo coefficiente influisce sull'andamento del grafico diminuendo le fun-
71	G. e S.	zioni di due in due.
		Sì scriviamo.

In questo protocollo ritroviamo per la prima volta alcune forme di ragionamento condizionale ad opera di Sara. All'inizio e alla fine della discussione, infatti, ritroviamo delle forme implicite del tipo *"…quindi…"* volte ad illustrare in maniera logico-consequenziale le risposte rispettivamente al primo e al secondo interrogativo [22-24, 70]. Il dibattito purtroppo si inasprisce ad un certo punto con l'inserimento di Cesare, rimasto inizialmente indietro in quanto distratto dalla telecamera. Nonostante i chiarimenti ricevuti sulla risoluzione della prima parte, Cesare pretende di avere ragione senza addurre delle motivazioni valide, ma anzi confondendosi tra uguaglianza e parallelismo tra rette [57]. Sara ad un certo punto sembra aver individuato la risposta al secondo quesito [56], ma il gruppo è ormai concentrato nel controbattere alle affermazioni di Cesare. Malgrado l'utilizzo ad opera di tre membri del gruppo di svariati costrutti linguistici con l'intento di raggiungere una idea condivisa, le dinamiche sociali legate all'influenza di un singolo membro hanno preso il sopravvento sullo sviluppo dei processi argomentativi in atto. Ciò ha provocato una diminuzione delle verbalizzazioni interpretative, fino ad arrivare ad una decisione finale non del tutto compresa e giustificata [68, 69].

6. Riflessioni finali e prospettive future

Lo sviluppo di processi argomentativi rappresenta uno degli obiettivi principali dell'insegnamento della matematica nella scuola secondaria di secondo grado. La stessa UMI-CIIM, nella sua proposta di curricolo "*Matematica 2003*" (MIUR-UMI-SIS, 2004) per la scuola secondaria di II grado, denominò un intero nucleo trasversale "*argomentare, congetturare, dimostrare*", proponendo in esso delle attività che favoriscono il passaggio dalle nozioni intuitive a forme di pensiero più rigoroso e sistematico. Ciò non è banale, perché così come sono importanti le regole grammaticali per l'insegnamento della lingua italiana o delle lingue straniere, anche in matematica occorre definire, studiare e fare propri gli strumenti di lavoro caratterizzanti questa disciplina. Se non vengono proposti esempi di ragionamento per assurdo o di ragionamento condizionale, difficilmente uno studente li utilizzerà al momento di argomentare le sue idee.

Dall'analisi dei protocolli si evince per l'appunto questa difficoltà nel giustificare le proprie affermazioni, sia in casi impliciti che espliciti di richieste di chiarimento. L'assenza di una analisi completa e puntuale della traccia, la scelta di operare sin da subito sui valori numerici, la trascrizione della prima idea avuta in mente senza alcuna discussione aggiuntiva rappresentano tutte situazioni facilmente verificabili, ma difficilmente modificabili senza alcuno intervento. In mancanza di questo, prevalgono quindi dei comportamenti che, il più delle volte, sfociano in dinamiche sociali allarmanti, come i casi già citati di deviazione fusionale o situazioni di polarizzazione e di deriva produttivistica (Carletti e Varani, 2005).

Un primo intervento migliorativo adottato durante i lavori ha visto l'assegnazione di un ruolo di presentatore in ciascun gruppo. Tale studente era incaricato di elaborare una proposta orale da presentare all'intera classe in rappresentanza del proprio team. Si è voluto in questo modo ricreare a livello globale una seconda *mathematical discussion*, questa volta diretta dall'insegnante, il cui compito era quello di stimolare e mostrare all'intera classe esempi di argomentazioni valide ed elaborate. Tali suggerimenti, il più delle volte proposti sotto forma interrogativa, sono stati in parte ripresi da quelli elaborati da Polya nel suo celebre libro *"How to solve it"* (1957). Porsi le giuste domande durante lo svolgimento di un esercizio o nella discussione di un problema è fondamentale per la scelta delle decisioni strategiche da intraprendere. Quando poi queste decisioni vanno prese insieme con altri soggetti allora occorre prestare attenzione anche alle relazioni interpersonali che inequivocabilmente si vengono a creare. Come forma di controllo è stato quindi assegnato un ruolo di mediatore, i cui compiti erano quelli di moderare la discussione (assicurandosi che i membri del gruppo rispettassero i turni di intervento) e di incoraggiare la partecipazione (assicurandosi che tutti i componenti del gruppo dessero il loro contributo).

Tutti questi accorgimenti sono stati affiancati da momenti di riflessione e di sviluppo di abilità metacognitive (Schoenfeld, 1987) mediante la visione di spezzoni di filmati dei lavori di gruppo realizzati nella stessa classe. L'influenza di questo specifico intervento non è al momento valutabile e rappresenta un interessante campo di ricerca da sviluppare in futuro. È auspicabile che l'attenzione rivolta all'auto-analisi possa contribuire efficacemente ad un miglioramento sia delle dinamiche sociali che della qualità dei dialoghi matematici.

Ulteriori ricerche sull'argomento sono sicuramente necessarie per evidenziare eventuali collegamenti tra lo sviluppo di abilità argomentative e la specifica modalità di interazione utilizzata (peer tutoring, cooperative learning e peer collaboration). Rendere più chiaro questo quadro di riferimento permetterebbe di facilitare il lavoro di tutti quei docenti interessati a sperimentare e utilizzare queste metodologie nella loro pratica quotidiana.

7. Bibliografia

Baines, E., Blatchford, P., & Kutnick, P. (2008). Pupil grouping for learning: developing a social pedagogy in the classroom. In R. Gillies, A. Ashman, & J. Terwel (Eds.), *The teacher's role in implementing cooperative learning in the classroom* (pp. 55-71). New York: Springer.

Baldrighi, A., Bellinzona, C., & Pesci, A. (2007). Una esperienza sull'intreccio di linguaggi per un uso consapevole di simboli matematici. In R. Imperiale, B. Piochi, P. Sandri (Eds.), *Atti del Convegno Nazionale n. 15 Matematica e difficoltà: I nodi dei linguaggi* (pp. 60-65). Bologna: Pitagora.

Baldrighi, A., Pesci, A., & Torresani, M. (2003). Relazioni disciplinari e sociali nell'apprendimento cooperativo. Esperienze didattiche e spunti di riflessione. *Matematica e Difficoltà*, 12, 170-178.

Cacciamani, S. (2008). *Imparare cooperando: dal cooperative learning alle comunità di ricerca*. Roma: Carocci.

Carletti, A., & Varani, A. (Eds.) (2005). *Didattica costruttivista: dalle teorie alla pratica in classe*. Trento: Edizioni Erickson.

Cavalli, A. (a cura di) (2000). *Gli insegnanti nella scuola che cambia: seconda indagine IARD sulle condizioni di vita e di lavoro nella scuola italiana*. Bologna: il Mulino.

Cavalli, A., Argentin, G. (a cura di) (2010). *Gli insegnanti italiani: come cambia il modo di fare scuola: terza indagine dell'Istituto IARD sulle condizioni di vita e di lavoro nella scuola italiana*. Bologna: il Mulino.

Comoglio, M. (1996). Verso una definizione del Cooperative Learning. *Animazione Sociale*, 4.

Damon, W. (1984). Peer education: The untapped potential. *Journal of Applied Developmental Psychology*, 5, 331-343.

Damon, W., & Phelps, E. (1989). Critical distinctions among three approaches to peer education. *International Journal of Educational Research*, 13(1), 9-19.

Dansereau, D. F. (1985). Learning strategy research. In J. Segal, S. Chipman, & R. Glaser (Eds.). *Thinking and learning skills. Relating instruction to basic research (Vol. 1)*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Davidson, N. (1979). The small group discovery method: 1967-1977. In J. Harvey & T. Romberg (Eds.). *Problem solving studies in mathematics*. Wisconsin Research and Development, Center for Individualized Schooling, University of Wisconsin. Madison.

De Vries, D. L., & Slavin, R. E. (1978). Teams-Games-Tournaments (TGT): Review of Ten Classroom Experiments. *Journal of Research and Development in Education*, 12(1), 28-38.

Deutsch, M. (1949). A Theory of cooperation and competition. *Human Relations*, 2(2), 129-152.

Deutsch, M. (1962). Cooperation and trust: Some theoretical notes. In M. R. Jones (Ed.) *Nebraska Symposium on Motivation* (pp. 275-319). Lincoln: University of Nebraska Press.

Devin-Sheehan, L., Feldman, R.S., & Allen, V. L. (1976). Research on children tutoring children: A critical review. *Review of Education of Research*, 46, 355-385.

Faggiano, E. (2005). Apprendimento Cooperativo in matematica con le tecnologie di rete. *Insegnare la matematica nella scuola di tutti e di ciascuno*, 208-211.

Gillies, R.M., & Boyle, M. (2010). Teachers' reflections on cooperative learning: Issues of implementation. *Teaching and Teacher Education*, 26(4), 933-940.

Hossain, A., & Tarmizi, R.A. (2013). Effects of cooperative learning on students' achievement and attitudes in secondary mathematics. *Procedia – Social and Behavioral Sciences*, 93, 473-477.

Johnson, D. W., & Johnson, R. T. (1987). *A meta-analysis of cooperative, competitive and individualistic goal structures*. Hillsdale, NJ.: LEA.

Johnson, D. W., & Johnson, R. T. (1989). *Cooperation and competition: Theory and research*. Interaction Book Company.

Johnson, D. W., & Johnson, R. T. (1996). Cooperation and the use of technology. *Handbook of research for educational communications and technology: A project of the Association for Educational Communications and Technology*, 785-811.

Johnson, D. W., Johnson, & R. T., Holubec, E. J. (1996). *Apprendimento cooperativo in classe*. Trento: Erickson.

Johnson, D. W., Johnson, R. T., & Maruyama, G. (1983). Interdependence and interpersonal attraction among heterogeneous and homogeneous individuals: A theoretical formulation and a meta-analysis of the research. *Review of Educational Research*, 53(1), 5-54.

Johnson, D. W., Johnson, R.T., & Smith, K. A. (1991). Cooperative learning: Increasing college faculty instructional productivity. In *ASHE-ERIC Higher Education Report No. 4*. The George Washington University, School of Education and Human Development: Washington, D.C.

Johnson, D. W., Maruyama, G., Johnson, R., Nelson, D., & Skon, L. (1981). Effects of cooperative, competitive, and individualistic goal structures on achievement: A meta-analysis. *Psychological Bulletin*, 89(1), 47.

Lehrer, R., & Lesh, R. (2013). Mathematical learning. In W. M. Reynolds, & G. E. Miller (Eds.). *Handbook of psychology. Vol. 7: educational psychology* (pp. 283-320). Hoboken, NJ: Wiley & Sons.

Lew, M., Mesch, D., Johnson, D. W., & Johnson, R. (1986). Components of cooperative learning: Effects of collaborative skills and academic group contingencies on achievement and mainstreaming. *Contemporary Educational Psychology*, 11(3), 229-239.

Lewin, K. (1948) *Resolving social conflicts; selected papers on group dynamics*. Gertrude W. Lewin (Ed.). New York: Harper & Row, 1948.

MIUR-UMI-SIS (2003). *Matematica 2001. La Matematica per il cittadino. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di matematica. Scuola Primaria e Scuola Secondaria di primo grado*. Liceo Vallisneri, Lucca.

MIUR-UMI-SIS (2004), *Matematica 2003. La Matematica per il cittadino. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di matematica. Scuola Secondaria di secondo grado*. Liceo Vallisneri, Lucca.

Nunnery, J. A., Chappell, S., & Arnold, P. (2013). A meta-analysis of a cooperative learning models effects on student achievement in mathematics. *Cypriot Journal of Educational Sciences*, 8(1), 34-48.

Pesci, A. (2003). Insegnanti di matematica e studenti: come migliorare il lato umano delle loro relazioni?. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 26B(4), 521-545.

Pesci, A. (2011). Studi di esperienze collaborative in presenza per una loro eventuale implementazione on-line. *TD – Tecnologie Didattiche*, 19(3), 183-188.

Pesci, A. (2016). L'interazione fra pari per favorire l'abilità argomentativa di studenti "bravi" nella soluzione di problemi matematici: i risultati di uno studio. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 39A(1), 61-74.

Pesci, A., Sgrignoli, M., Andreoletti, M., Scarpaci, C., Turlon, S., (2015). Aspetti metodologico-didattici nell'apprendimento collaborativo della matematica e sperimentazione di percorsi disciplinari, Aisberg (Archivio istituzionale Università degli Studi di Bergamo), Working papers MEQ. *Education Series*, reperibile direttamente all'indirizzo: https://aisberg.unibg.it/retrieve/handle/10446/36451/30206/1-2015_education_con_cover.pdf.

Pirie, S. E. B., & Schwarzenberger, R. L. E. (1988). Mathematical discussion and mathematical understanding. *Educational Studies in Mathematics*, 19(4), 459-470.

Polya, G. (1957). *How to Solve it: A New Aspects of Mathematical Methods* (2nd Ed.). Prentice University Press.

Saborit, J. A. P., Fernández-Río, J., Estrada, J. A. C., Méndez-Giménez, A., & Alonso, D. M. (2016). Teachers' attitude and perception towards cooperative learning implementation: Influence of continuing training. *Teaching and Teacher Education*, 59, 438-445.

Schoenfeld, A. H. (1987). What's all the fuss about metacognition? In A. H. Schoenfeld (Eds.). *Cognitive science and mathematics education* (pp. 189-215).

Serrano, J. M., González-Herrero, M. E., Pons, R. M. (2008). *Aprendizaje cooperativo en Matemáticas. Diseño de actividades en Educación Infantil, Primaria y Secundaria*. Universidad de Murcia. Servicio de Publicaciones.

Slavin, R. E. (1978). Student teams and achievement divisions. *Journal of Research and Development in Education*, 12(1), 39-49.

Slavin, R. E. (1985). Cooperative learning: Applying contact theory in desegregated schools. *Journal of Social Issues*, 41(3), 45-62.

Slavin, R. E. (1990). *Cooperative learning. theory, research, and practice*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Smith, K., Johnson, R.T., & Johnson, D.W. (1981). Can conflict be constructive? Controversy versus concurrence seeking in learning groups. *Journal of Educational Psychology*, 73(5), 651-663.

Spagnuolo, A. (2017). *The effects of the equality parameter on mathematics students' performance. A comparative analysis of Peer Education interventions in teaching-learning of linear and quadratic functions*. Tesi di dottorato. Università degli Studi di Ferrara.

Thanh, P. T. H. (2011). An Investigation of Perceptions of Vietnamese Teachers and Students toward Cooperative Learning (CL). International Education Studies, 4(1), 3-12.

Webb, N. M. (1983). Predicting learning from student interaction: Defining the interaction variable. *Educational Psycholgist*, 18, 33-41.

Webb, N. M. (1985). Student interaction and learning in small groups: A research summary. In R. E. Slavin, S. Sharan, S. Kagan, R. Hertz-Lazarowitz, C. Webb, & R. Schmuck (Eds.). *Learning to cooperate, cooperating to learn* (pp. 147-172). New York: Plenum.

Webb, N. M. (1991). Task-related verbal interaction and mathematics learning in small group. *Journal of Research in Mathematics Education*, 22, 366-389.

Weissglass, J. (1979). *Exploring elementary mathematics. A small-group approach for teaching*. San Francisco, CA: WH Freeman.

Zakaria, E., Solfitri, T., Daud, Y., & Abidin, Z. Z. (2013). Effect of cooperative learning on Secondary school students' mathematics achievement. *Creative Education*, 4, 98-100.

Received October 10, 2017
Revision received December 3, 2017/December 4, 2017
Accepted January 12, 2018