

MODELLI NUMERICI PER LO STUDIO DI FENOMENI TRANSITORI IDRAULICI IN CONDOTTE VISCOELASTICHE

Giulia Bertaglia ^{1*}, Matteo Ioriatti ², Alessandro Valiani ¹, Michael Dumbser ² & Valerio Caleffi ¹

(1) Dipartimento di Ingegneria, Università degli Studi di Ferrara (Ferrara)

(2) Dipartimento di Ingegneria Civile, Ambientale e Meccanica, Università degli Studi di Trento (Trento)

*email: giulia.bertaglia@unife.it

ASPETTI CHIAVE

- Si confrontano Metodo delle Caratteristiche, Metodo ai Volumi Finiti di tipo Esplicito e Path-Conservative e Metodo ai Volumi Finiti di tipo Semi-Implicito nello studio di fenomeni transitori in condotte viscoelastiche.
- Viene proposta una nuova formulazione della legge del tubo viscoelastica di una generica catena di unità Kelvin-Voigt per l'utilizzo della stessa come equazione aggiuntiva del sistema matematico alla base del fenomeno e confrontata con la più semplice formulazione dello Standard Linear Solid Model.
- Si osserva che l'aumento del numero di parametri viscoelastici non restituisce un incremento consistente della qualità del risultato finale, pesando invece in termini di costo computazionale e di difficoltà di calibrazione dei parametri.
- Vengono evidenziate delle criticità relative al Metodo delle Caratteristiche, ad esempio non sufficientemente robusto (nella sua formulazione classica) per simulare correttamente fenomeni complessi quali la cavitazione.

1 PREMESSA

Le condotte plastiche in cloruro di polivinile (PVC), polietilene (PE) e polietilene ad alta densità (PEAD) stanno ricoprendo un ruolo sempre più importante nel settore dei sistemi idrici, essendo spesso preferite ad altri materiali (ad es. acciaio e cemento) per le reti di distribuzione e di irrigazione ed i sistemi di raccolta di acque reflue. Quasi senza eccezioni, i polimeri appartengono ad una classe di sostanze dalle proprietà viscoelastiche, rispondendo a sollecitazioni esterne con un comportamento intermedio tra un solido elastico e un liquido viscoso (Lakes, 2009) che restituisce una deformazione elastica istantanea accoppiata ad un effetto di smorzamento ritardato. Questo aspetto è particolarmente visibile nel caso di fenomeni transitori idraulici, per i quali è stato già dimostrato che la teoria classica di Allievi-Joukowski per il colpo d'ariete, che si basa sull'assunzione di un comportamento elastico lineare (Wylie & Streeter, 1978), non è idonea per predire l'andamento reale delle pressioni in tubazioni flessibili (Covas et al., 2005). Inoltre, tipicamente nelle applicazioni tecniche che riguardano fenomeni transitori in condotte il termine convettivo delle corrispondenti equazioni che governano il moto è generalmente trascurabile e, sotto queste condizioni, queste equazioni sono efficientemente discretizzate dal Metodo delle Caratteristiche (MOC). Solo negli ultimi anni la reperibilità di schemi numerici molto efficienti e robusti, come recenti Metodi ai Volumi Finiti (FVM), ha dato avvio a simulazioni di flussi transitori che sfruttano schemi numerici diversi dal MOC, permettendo una migliore rappresentazione della fisica alla base del fenomeno.

2 MODELLO MATEMATICO

Il sistema di equazioni che governa il moto di un fluido comprimibile in una condotta deformabile è ottenuto a partire dalle equazioni di Navier-Stokes, mediate sulla sezione della condotta, assumendo una configurazione assialsimmetrica. Il sistema di equazioni 1D alle derivate parziali (PDE) risultante è così composto dall'equazione di continuità e dall'equazione di conservazione della quantità di moto (Ghidaoui et al., 2005). Per chiudere il sistema, è necessario utilizzare l'equazione di stato (EOS) del fluido e la legge costitutiva del materiale della tubazione. Assumendo un comportamento barotropico del fluido e tenendo in considerazione casi in cui possono manifestarsi episodi di cavitazione, l'EOS scelta è quella utilizzata da Dumbser et al. (2015). La legge costitutiva del materiale, invece, viene scelta sulla base dell'ipotesi di comportamento puramente elastico o viscoelastico del materiale.

2.1 Legge costitutiva del materiale

Volendo considerare una legge elastica, generalmente sufficiente per descrivere il comportamento reologico di condotte in acciaio ed una buona prima approssimazione del comportamento di condotte in plastica, si fa riferimento alla legge di Laplace. Differenziando rispetto al tempo t questa legge, si ottiene una PDE rappresentativa del comportamento fluido-struttura come chiusura del sistema di equazioni di bilancio (Leibinger et al., 2016).

Per riprodurre al meglio il reale comportamento dei materiali polimerici è tuttavia necessario introdurre il concetto di viscoelasticità. Una relazione costitutiva di tipo lineare viscoelastico può essere definita pensando che il materiale sia dato dalla somma di elementi lineari elastici (molle) ed elementi lineari viscosi (ammortizzatori/dissipatori), per tenere in considerazione il rilassamento della parete della condotta nel tempo. Il modello viscoelastico più semplice è il modello a 3 parametri, noto anche come Standard Linear Solid Model (SLSM). Per ottenere dei modelli più flessibili, è possibile aumentare il numero di elementi Maxwell (molla e dissipatore in serie) o Kelvin-Voigt (molla e dissipatore in parallelo), ottenendo un modello multiparametro (Lakes, 2009). Per gli studi qui presentati, viene considerato dapprima il modello a 3 parametri e, successivamente, un modello a 11 parametri analogo a Evangelista et al. (2015).

A partire dall'equazione costitutiva del modello a 3 parametri SLSM, con la procedura presentata da Leibinger et al. (2016), è possibile ottenere la PDE rappresentativa del comportamento fluido-struttura di un materiale viscoelastico:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \left[\frac{E_0 \phi}{2Wc_0^2} + \rho \right]^{-1} \frac{\partial(A\rho u)}{\partial x} = \frac{A[2W(p - p_0) - E_\infty(\phi - 1)]}{\tau_r(2Wc_0^2\rho + E_0\phi)}, \quad (1)$$

con A area della sezione, p pressione, u velocità del fluido in condotta, ρ densità, $c_0' = (\partial p / \partial \rho)^{1/2}$ celerità dipendente dall'EOS, E_0 modulo elastico istantaneo (modulo di Young) del materiale, $W = \alpha R/s$ il rapporto tra il raggio R della tubazione e lo spessore s della stessa moltiplicato per il parametro adimensionale di vincolo della condotta α (Wylie & Streeter, 1978), $\phi = A/A_0$ area di sezione normalizzata rispetto ad A_0 area di sezione della tubazione in condizioni di equilibrio, ovvero a pressione p_0 , ed infine E_∞ e τ_r rispettivamente modulo di Young asintotico e tempo di rilassamento del materiale. Con alcuni passaggi algebrici, sfruttando l'EOS e l'equazione di continuità, è inoltre possibile ricavare dalla PDE l'equivalente ODE del comportamento reologico del materiale, che risulta:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{2WA_0}{E_0} \frac{dp}{dt} + \frac{2WA_0(p - p_0) - E_\infty(A - A_0)}{\tau_r E_0}. \quad (2)$$

Per estendere l'applicabilità di Eq. (1) a modelli viscoelastici di tipo multiparametro, viene presentata una formulazione originale relativa ad una generica catena avente N_{KV} unità Kelvin-Voigt in serie ed una molla isolata. A partire dalla relazione di base sforzo-deformazione, con le dovute manipolazioni algebriche, si ottiene la seguente PDE di chiusura:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \left[\frac{E_0 \phi}{2Wc_0^2} + \rho \right]^{-1} \frac{\partial(A\rho u)}{\partial x} = \frac{2E_0 A \left[W(p - p_0) \sum_{k=1}^{N_{KV}} \frac{1}{\eta_k} - \sum_{k=1}^{N_{KV}} \frac{\varepsilon_{rk}}{\tau_{rk}} \right]}{2Wc_0^2\rho + E_0\phi}, \quad (3)$$

con η viscosità e ε_r deformazione ritardata, calcolata seguendo l'approssimazione presentata da Covas et al. (2005), dove il pedice k fa riferimento al parametro del k -esimo elemento della catena. Con un procedimento analogo al caso del modello a 3 parametri, è possibile ottenere la corrispondente ODE di Eq. (3), pertanto:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{2WA_0}{E_0} \frac{dp}{dt} + 2A_0 \left[W(p - p_0) \sum_{k=1}^{N_{KV}} \frac{1}{\eta_k} - \sum_{k=1}^{N_{KV}} \frac{\varepsilon_{rk}}{\tau_{rk}} \right]. \quad (4)$$

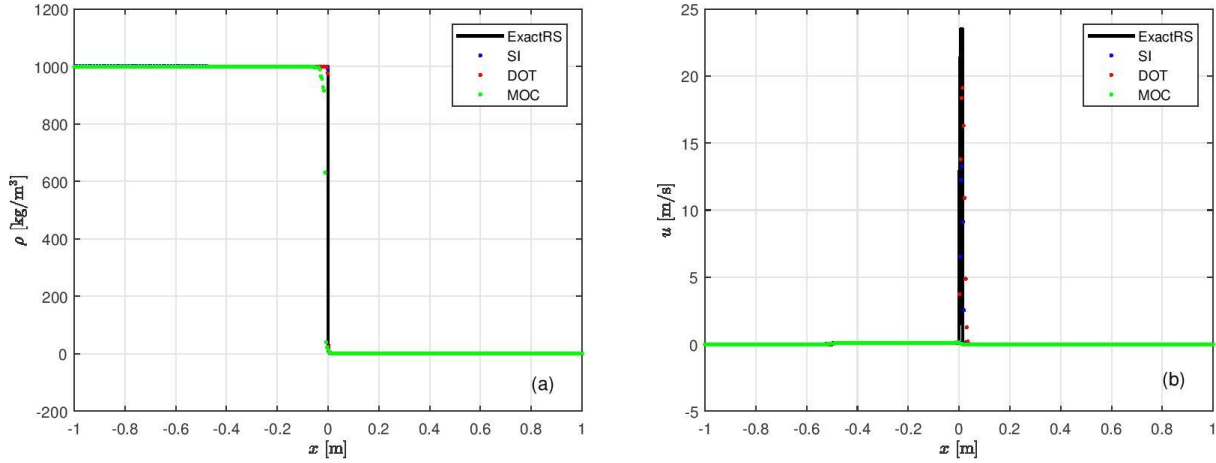


Figura 1. Confronto dei risultati numerici ottenuti con MOC, DOT e SI rispetto alla soluzione quasi-esatta (ExactRS) nel problema di Riemann, al tempo $t_{end} = 5.0e-4$, in termini di (a) densità e (b) velocità.

2.2 Sistemi completi accoppiati per il problema fluido-struttura

Le equazioni di continuità e della quantità di moto possono essere espresse in forme differenti, in base alla trascurabilità o meno dei termini convettivi. Inoltre, l'equazione di chiusura del sistema assume forme differenti che dipendono dal comportamento del materiale della condotta ipotizzato. La scelta della formulazione più appropriata del sistema di equazioni dipende quindi anche dal modello numerico utilizzato.

Seguendo la teoria classica di Allievi-Joukowsky il contributo dei termini convettivi viene trascurato ottenendo le equazioni standard per lo studio di colpi d'ariete con il MOC (Ghidaoui et al., 2005).

Scegliendo invece di non trascurare i termini convettivi, si ricava il seguente sistema di equazioni:

$$\frac{\partial(A\rho)}{\partial t} + \frac{\partial(A\rho u)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial(A\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(A\rho u^2 + Ap)}{\partial x} - p \frac{\partial A}{\partial x} = F_R, \quad (5)$$

dove F_R è il termine rappresentativo delle perdite di carico per attrito (in questo contesto considerato unicamente quasi-stazionario). Questo sistema a due equazioni, nel contesto di un FVM di tipo Esplicito Path-Conservative, sarà associato alla PDE (1) o (3) in base al modello viscoelastico del materiale prescelto. Si fa notare che nel caso di ipotesi di comportamento elastico del materiale, la PDE da utilizzare coincide con quella di Eq. (1) o (3) a meno del termine sorgente (rappresentativo della componente viscosa), da porre uguale a zero. Come quarta equazione viene considerata un'evoluzione fittizia della sezione di riferimento, ponendo $\partial_t A_0 = 0$, al fine di trattare in modo formalmente corretto eventuali discontinuità longitudinali di A_0 .

Considerando uno schema FVM di tipo Semi-Implicito, invece, si considera ancora il sistema (5), ma associato alla legge di Laplace, in caso di comportamento elastico della condotta, o alle ODE (2) o (4), in caso di modello viscoelastico rispettivamente a 3 parametri o multiparametro, al fine di ricavare l'evoluzione temporale dell'area di sezione.

3 MODELLI NUMERICI

Per risolvere i modelli matematici presentati nel capitolo precedente, sono stati scelti e confrontati tre diversi schemi numerici. Il modello standard per studi di colpo d'ariete è il Metodo delle Caratteristiche (MOC), già utilizzato nel lavoro di Covas et al. (2005). Gli ulteriori due metodi che sono stati analizzati sono il FVM di tipo Esplicito, Path-Conservative, associato al solutore di Riemann di Dumbser-Osher-Toro (DOT) utilizzato da Leibinger et al. (2016) ed il FVM di tipo Semi-Implicito (SI) per flussi di tipo assialsimmetrico in tubazioni deformabili presentato da Dumbser et al. (2015). Per una trattazione dettagliata di questi modelli numerici si rimanda alla bibliografia.

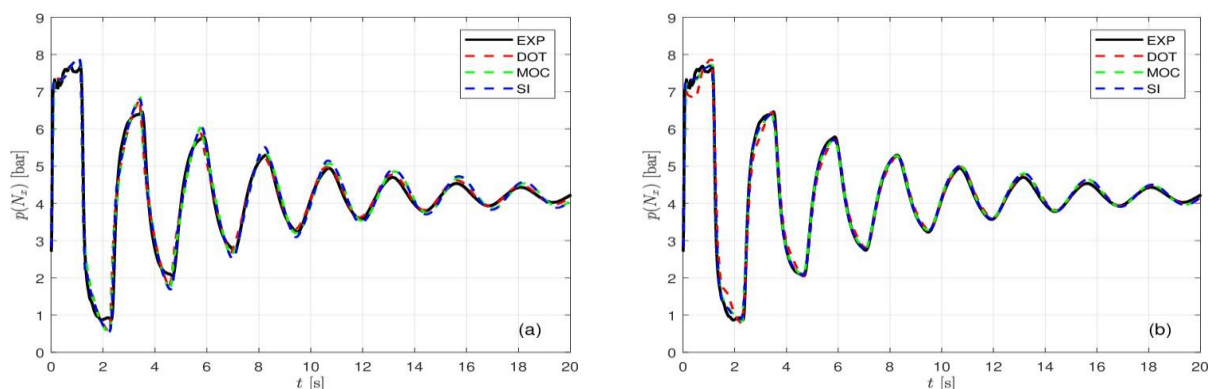


Figura 2. Pressione nella sezione terminale della condotta: confronto dei risultati numerici ottenuti con MOC, DOT e SI rispetto alla soluzione sperimentale (EXP) di *Evangelista et al.* (2015) nel problema di colpo d'ariete con modello viscoelastico a (a) 3 parametri e (b) multiparametro (11 parametri).

4 RISULTATI NUMERICI E DISCUSSIONE

Per confrontare i tre modelli numerici, vengono qui presentati due diversi tipi di test. Il primo riguarda un problema di Riemann, risolto con legge del tubo elastica, per il quale esiste una soluzione quasi-esatta di confronto. Il secondo caso test riguarda invece un problema di colpo d'ariete in una tubazione in PEAD, con dati sperimentali di riferimento di *Evangelista et al.* (2015). Per questo test sono state utilizzate le due leggi viscoelastiche, a 3 e 11 parametri, con questi ultimi debitamente calibrati mediante algoritmo SCE-UA (Shuffled Complex Evolution – University of Arizona), sviluppato da *Duan et al.* (1993). Il problema di Riemann scelto rappresenta un caso di cavitazione ed è stato effettuato per testare la robustezza dei tre modelli numerici e valutarne eventuali criticità. Benché per questo problema sia stata implementata una versione del MOC con Metodo degli Intervalli Specifici e separazione delle computazioni per i due tratti del dominio con condizione iniziale costante, osservando i risultati riportati in Fig. 1 si deduce che in contesti complessi tale schema numerico non è in grado di catturare la corretta evoluzione della rarefazione e dell'onda di shock (visibile in particolar modo in Fig. 1(b), dove si perde il picco di velocità). Il problema di colpo d'ariete presentato è relativo ad una tubazione DN50 ($R = 22.0$ mm) lunga 203.3 m con una portata di 2.0 l/s. Per generare sperimentalmente l'onda transitoria, è stata effettuata una manovra di chiusura della valvola posizionata a valle della condotta con tempo di chiusura pari a 0.1 s. Dalla Fig. 2 si nota che in questo caso i tre modelli numerici riproducono risultati simili, sia utilizzando la legge del tubo viscoelastica a 3 parametri, sia utilizzando quella multiparametro. Parallelamente, si osserva che l'aumento di parametri viscoelastici non restituisce un incremento consistente della qualità del risultato finale, pesando, d'altro canto, in termini di costo computazionale e di difficoltà di calibrazione dei parametri stessi, aspetto che suggerisce di orientare la scelta verso il modello a minor numero di parametri.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- Lakes R. *Viscoelastic Materials*, Cambridge University Press, New York, USA, 2009.
- Wylie E. & Streeter V. *Fluid Transients*, McGraw-Hill Inc., New York, USA, 1978.
- Covas D., Stoianov I., Mano J. F., Ramos H., Graham N. & Maksimovic C. The dynamic effect of pipe-wall viscoelasticity in hydraulic transients. Part II - model development, calibration and verification, *Journal of Hydraulic Research*, 2005, 43(1), 56-70.
- Ghidaoui M. S., Zhao M., McInnis D. A. & Axworthy D. H. A Review of Water Hammer Theory and Practice, *Applied Mechanics Reviews*, 2005, 58(1), 49-76.
- Dumbser M., Iben U. & Ioriatti M. An efficient semi-implicit finite volume method for axially symmetric compressible flows in compliant tubes, *Applied Numerical Mathematics*, 2015, 89, 24-44.
- Leibinger J., Dumbser M., Iben U. & Wayand I. A path-conservative Osher-type scheme for axially symmetric compressible flows in flexible visco-elastic tubes, *Applied Numerical Mathematics*, 2016, 105(6), 47-63.
- Evangelista S., Leopardi A., Pignatelli R. & de Marinis G. Hydraulic Transients in Viscoelastic Branched Pipelines, *Journal of Hydraulic Engineering*, 2015, 141(8), 04015016.
- Duan Q. Y., Gupta V. K., & Sorooshian S. Shuffled complex evolution approach for effective and efficient global minimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1993, 76(3), 501-521.