

## CROLLO DIGA IN CORRISPONDENZA DI BRUSCHE VARIAZIONI DI LARGHEZZA

Alessandro Valiani <sup>1\*</sup> & Valerio Caleffi <sup>1</sup>

(1) Dipartimento di Ingegneria, Università degli Studi di Ferrara (Ferrara)

\*email: alessandro.valiani@unife.it

### ASPETTI CHIAVE

- Le equazioni alle acque basse sono scritte in termini di profondità, portata specifica, larghezza.
- A monte e valle dello sbarramento sono inizialmente diversi i tiranti e le larghezze dell'alveo.
- La formulazione non conservativa è integrata numericamente con il metodo DOT al 2° ordine.
- Il path scelto è non lineare nella profondità e lineare nell'energia specifica e nella portata totale.
- Il path scelto consente di conservare esattamente l'energia specifica sulla singolarità.

### 1 PREMESSA

Si affronta il classico problema di Stoker, rivisitandolo per analizzare il comportamento del sistema fisico quando nella sezione dello sbarramento esista un brusco restringimento o allargamento dell'alveo, supposto per semplicità rettangolare e piatto. Come è prassi consolidata, si trascura l'attrito al fondo. Il sistema di equazioni alle acque basse viene riscritto considerando quali variabili la profondità  $h(x,t)$ , la portata per unità di larghezza  $q(x,t)$  e la larghezza della sezione  $b(x)$ , ipotizzata variabile nello spazio ma costante nel tempo. Ai classici bilanci di massa e quantità di moto si aggiunge l'equazione di invarianza della larghezza nel tempo, in analogia a quanto utilizzato da *LeFloch & Thanh* (2011) per trattare le discontinuità del fondo:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{q}{b} \frac{\partial b}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} g h^2 + \frac{q^2}{h} \right) + \frac{q^2}{b h} \frac{\partial b}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial b}{\partial t} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

in cui  $x$  e  $t$  sono rispettivamente spazio e tempo, e  $g$  è l'accelerazione di gravità. Questo espediente consente di tenere in conto in maniera appropriata le eventuali discontinuità della larghezza. Il sistema (1) può essere riscritto nella forma non conservativa quasi lineare come segue:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + A(W) \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \quad \text{in cui:} \quad W = \begin{bmatrix} h \\ q \\ b \end{bmatrix}; \quad A(W) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{q}{b} \\ g h - \left(\frac{q}{h}\right)^2 & 2 \frac{q}{h} & \frac{q^2}{h b} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Supposta  $x = 0$  la sezione dello sbarramento, la soluzione del crollo diga di Stoker per sezione discontinua dell'alveo equivale alla soluzione del problema di Riemann in cui le condizioni iniziali sono:

$$\begin{bmatrix} h & q & b \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} h_L & 0 & b_L \end{bmatrix}^T \text{ per } x < 0; \quad \begin{bmatrix} h & q & b \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} h_R & 0 & b_R \end{bmatrix}^T \text{ per } x > 0 \quad (3)$$

nella quale il pedice L indica lo stato a monte dello sbarramento ed R lo stato a valle dello stesso.

## 2 STRUTTURA ANALITICA DELLA SOLUZIONE

La matrice jacobiana  $A$  dà luogo alla terna di autovalori  $[u - c; 0; u + c]$  dove  $u = q/h$  è la velocità media, e  $c = \sqrt{gh}$  è la celerità delle piccole perturbazioni, mentre gli autovettori destri sono le colonne della matrice  $\mathcal{R}$  e gli autovettori sinistri sono le righe della matrice  $\mathcal{L} = \mathcal{R}^{-1}$ :

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u - c & \frac{u^2 - c^2}{u} & u + c \\ 0 & -\frac{b(u^2 - c^2)}{u^2 h} & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathcal{L} = \begin{bmatrix} +\frac{u+c}{2c} & -\frac{1}{2c} & +\frac{uh}{2b(u-c)} \\ 0 & 0 & -\frac{u^2 h}{b(u^2 - c^2)} \\ -\frac{u-c}{2c} & +\frac{1}{2c} & +\frac{uh}{2b(u+c)} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Gli integrali generalizzati di Riemann relativi rispettivamente al primo, secondo e terzo autovettore (Toro, 2009) forniscono le seguenti relazioni:

$$dh = \frac{d(uh)}{u - c} = \frac{db}{0} \Rightarrow \begin{cases} u + 2c = \text{const} \\ b = \text{const} \end{cases} \quad (5)$$

$$dh = \frac{u}{u^2 - c^2} d(uh) = \frac{u^2 h}{b(u^2 - c^2)} db \Rightarrow \begin{cases} qb = Q = \text{const} \\ h + \frac{u^2}{2g} = E = \text{const} \end{cases} \quad (6)$$

dove  $Q$  è la portata totale e  $E$  è il carico specifico,

$$dh = \frac{d(uh)}{u + c} = \frac{db}{0} \Rightarrow \begin{cases} u - 2c = \text{const} \\ b = \text{const} \end{cases} \quad (7)$$

Mentre le relazioni (5) e (7) coincidono con la soluzione classica che fornisce gli invarianti noti in alveo rettangolare prismatico, la relazione (6) descrive il comportamento della soluzione in corrispondenza di una variazione spaziale ma stazionaria della larghezza, in corrispondenza della quale si conservano la portata totale e l'energia specifica. Come già mostrato in relazione a discontinuità della quota del fondo, lo schema alle acque basse “puro” non “vede” gli effetti dissipativi localizzati, ed il carico totale si conserva in corrispondenza dell'attraversamento di sezioni singolari (LeFloch & Thanh, 2011; Caleffi et al, 2016; Caleffi & Valiani, 2017; Valiani & Caleffi, 2017).

## 3 SOLUZIONE NUMERICA E RISULTATI

Per utilizzare un metodo numerico idoneo alla cattura delle discontinuità della soluzione dovute alla variazione di larghezza si è implementato un metodo del secondo ordine (Leibinger et al, 2106) che impiega un solutore di Riemann di tipo Dumbser-Osher-Toro (DOT, Dumbser & Toro 2011), utilizzando un path di tipo non lineare per l'applicazione del metodo path-conservativo sviluppato originariamente per path lineare da Parés (2006). In questo modo, il metodo numerico può essere sintetizzato nei passi seguenti. Il dominio è suddiviso in  $N_c$  celle, la cella generica ha la coordinata  $x_i$  come centro cella ed è delimitata dalle ascisse  $x_{i-1/2}$ ,  $x_{i+1/2}$ ; l'istante generico è  $t^n$ , e la procedura avanza verso il tempo  $t^{n+1}$ .

$$\Delta W_i^n = \text{minmod}(W_i^n - W_{i-1}^n, W_{i+1}^n - W_i^n) \quad (8)$$

$$\frac{\partial W_i^n}{\partial t} = -\Lambda(W_i^n) \frac{\Delta W_i^n}{\Delta x} \quad (9)$$

$$W_i^{n+1/2} = W_i^n + \frac{1}{2} \Delta t \frac{\partial W_i^n}{\partial t} \quad (10)$$

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (D_{i+1/2}^- + D_{i-1/2}^+) - \Delta t \Lambda(W_i^{n+1/2}) \frac{\Delta W_i^n}{\Delta x} \quad (11)$$

essendo:

$$D_{i+1/2}^\pm = \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \mathcal{A}(W_{i+1/2}^-, W_{i+1/2}^+, s) \pm \left| \mathcal{A}(W_{i+1/2}^-, W_{i+1/2}^+, s) \right| \right) \frac{\partial \Psi}{\partial s} ds \quad (12)$$

con:

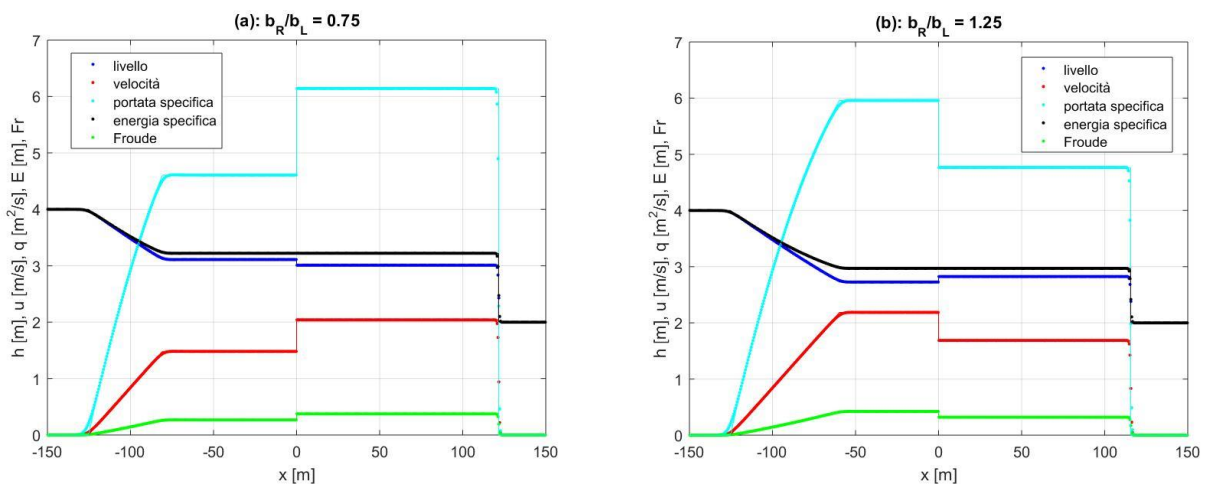
$$W_{i+1/2}^- = W_i^n + \frac{1}{2} \Delta W_i^n + \frac{1}{2} \Delta t \frac{\partial W_i^n}{\partial t}; \quad W_{i-1/2}^+ = W_i^n - \frac{1}{2} \Delta W_i^n + \frac{1}{2} \Delta t \frac{\partial W_i^n}{\partial t} \quad (13)$$

$$|\mathcal{A}| = \mathcal{R} |\Lambda| \mathcal{L}, \quad \text{con} \quad \Lambda = \text{diag} \left( u - \sqrt{gh}, 0, u + \sqrt{gh} \right) \quad (14)$$

In questo modo, adottando l'integrazione di Gauss-Lobatto per eseguire l'integrale (12) lungo il path  $\Psi$ , si procede avanzando nel tempo ed aggiornando la soluzione. Per la coerenza interna del metodo (secondo ordine di accuratezza) è sufficiente utilizzare 3 punti di Gauss per la suddetta integrazione.

Ispirandosi al significato dell'equazione (6), si utilizza un path lineare nelle variabili  $E$ ,  $Q$ ,  $b$ . Di conseguenza, il path risulta non lineare nella variabile  $h$ , che viene ricavata da  $E$  utilizzando le espressioni analitiche ricavate in Valiani & Caleffi (2008), nonché nella variabile  $q$ , ricavata semplicemente da  $q = Q/b$ . Si veda Caleffi & Valiani (2017) per i dettagli relativi all'implementazione di path non lineari nel contesto delle equazioni alle acque basse.

Questo accorgimento consente di costruire una procedura che fornisce risultati nei quali è ben soddisfatta sia la conservazione della portata che del carico totale in corrispondenza del brusco cambio di larghezza.

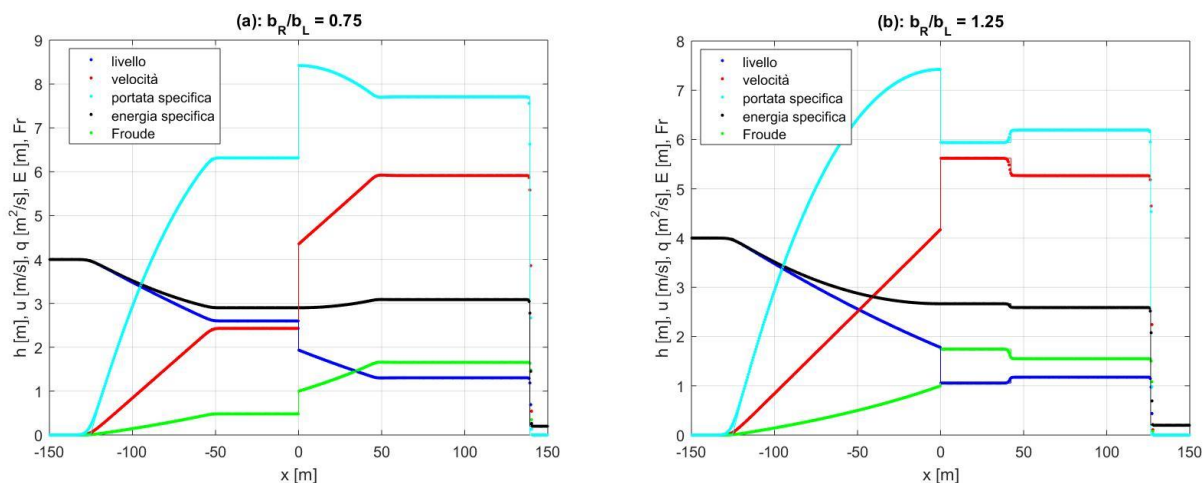


**Figura 1.** Risultati ( $t = 20$  s) nel caso di restringimento (a) ed allargamento (b), senza attraversamento dello stato critico nella sezione  $x = 0$ . Tiranti di monte e valle rispettivamente  $h_L = 4$  m e  $h_R = 2$  m. Linea continua: soluzione analitica; punti: soluzione numerica.

Si mostrano i risultati relativi sia al restringimento di sezione ( $b_R/b_L = 3/4$ ) che all'allargamento ( $b_R/b_L = 5/4$ ), per un caso di rapporto  $h_R/h_L = 1/2$  relativamente "grande" (Fig. 1), nonché per un caso di rapporto  $h_R/h_L = 1/20$  piuttosto "piccolo" (Fig. 2). Nel primo caso non si ha attraversamento dello stato critico nella

sezione  $x = 0$ , nel secondo caso tale attraversamento arricchisce la struttura della soluzione.

Nelle figure 1a e 1b si osserva una soluzione molto simile a quella classica di Stoker: lo stato costante indisturbato di monte è seguito da una rarefazione, due stati costanti separati da un'onda di contatto stazionaria (a larghezza costante tale onda non esiste e i due stati sono identici), uno shock che separa il secondo stato costante dallo stato di quiete di valle. Tale shock avanza con celerità positiva verso valle. I due stati costanti separati dall'ascissa  $x = 0$  sono caratterizzati dalla stessa energia specifica e dalla stessa portata totale, proprietà che viene ben catturata da modello numerico, appositamente concepito.



**Figura 2.** Risultati ( $t = 20$  s) nel caso di restringimento (a) ed allargamento (b), con attraversamento dello stato critico nella sezione  $x = 0$ . Tiranti di monte e valle rispettivamente  $h_L = 4$  m e  $h_R = 0.2$  m. Linea continua: soluzione analitica; punti: soluzione numerica.

Nelle figure 2a e 2b si osserva una soluzione molto più ricca. Nel caso (a) la rarefazione, caratterizzata da celerità negative, è seguita da uno stato costante fino alla sezione  $x = 0$ . In  $x = 0^+$  sussiste lo stato critico, seguito da una rarefazione, da uno stato costante e dallo shock finale che avanza verso valle. Il primo autovalore ( $u - c$ ) diventa nullo nella sezione  $x = 0$ , sezione nella quale la soluzione è risonante e si perde, localmente, la stretta iperbolicità del problema. Per  $x > 0$  tale autovalore è positivo, e l'ordinamento degli autovalori commuta. Nel caso (b) la rarefazione di monte raggiunge la sezione dello sbarramento, e lo stato critico si verifica per  $x = 0^-$ . La soluzione è di nuovo risonante. Per  $x = 0^+$  lo stato costante è supercritico, separato da un ulteriore stato costante supercritico tramite uno shock che avanza verso valle. Tale stato supercritico è separato dalla quiete di valle da un ulteriore shock che avanza con celerità positiva. In entrambi i casi (a) e (b), la conservazione di portata ed energia specifica sull'attraversamento della sezione  $x = 0$  è ben rispettata dallo schema numerico.

## RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- Caleffi, V., Valiani, A., Li G. A comparison between bottom-discontinuity numerical treatments in the DG framework, *Applied Mathematical Modelling* 40, 2016, pp. 7516-7531.
- Caleffi, V. & Valiani, A. Well balancing of the SWE schemes for moving-water steady flows, *Journal of Computational Physics* 342, 2017, pp. 85-116.
- Dumbser, M. & Toro, E.F. A simple extension of the Osher Riemann solver to non-conservative hyperbolic systems, *Journal of Scientific Computing* 48 (1-3), 2011, pp. 70-88.
- LeFloch, P.G. & Thanh, M.D. A Godunov-type method for the shallow water equations with discontinuous topography in the resonant regime, *Journal of Computational Physics* 230 (20), 2011, pp. 7631-7660.
- Leibinger, J., Dumbser, M., Iben, U., Wayand, I. A path-conservative Osher-type scheme for axially symmetric compressible flows in flexible visco-elastic tubes, *Applied Numerical Mathematics* 105, 2016, pp. 47-63.
- Pares, C. Numerical methods for nonconservative hyperbolic systems: A theoretical framework, *SIAM Journal on Numerical Analysis* 44 (1), 2006, pp. 300-321.
- Toro, E.F. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, Berlin, 2009.
- Valiani, A. & Caleffi, V. Depth-energy and depth-force relationships in open channel flows: Analytical findings, *Advances in Water Resources* 31 (3), 2008, pp. 447-454.
- Valiani, A. & Caleffi, V. Momentum balance in the shallow water equations on bottom discontinuities, *Advances in Water Resources* 100, 2017, pp. 1-13.