



Università degli Studi di Ferrara

DOTTORATO DI RICERCA IN "SCIENZE DELL'INGEGNERIA"

CICLO XXII

COORDINATORE Prof. TRILLO STEFANO

*ELEMENTI FINITI A PIU' CAMPI PER LO STUDIO DI ELEMENTI STRUTTURALI IN COMPOSITO
LAMINATO*

Settore Scientifico Disciplinare ICAR/08

Dottorando

Dott. BATTAGLIA RICCARDO

(firma)

Tutore

Prof. TRALLI ANTONIO

(firma)

Anni 2007/2009



Università degli Studi di Ferrara

Dipartimento di Ingegneria

Battaglia Riccardo

Elementi finiti a più campi per lo studio di
elementi strutturali in composito laminato

Marzo 2010

Dottorato di Ricerca in
Ingegneria Civile e Ingegneria Industriale

Relatore: Chiar.mo Prof. Ing. Antonio Tralli

Ringraziamenti

Desidero, a doveroso compimento di questa tesi, ringraziare tutti coloro che hanno contribuito al mio lavoro.

Primo tra tutti ringrazio il Professor Antonio Tralli cui va la mia stima per l'infinita pazienza e costanza con cui mi ha guidato in questi anni.

Ringrazio il Professor Antonio Maria Cazzani a cui va il mio rispetto per il tempo speso a sviluppare assieme i temi di cui mi sono occupato.

Un sincero ringraziamento al mio amico Dott. Ing. Edoardo Artioli per avermi dato le energie necessarie a portare avanti il mio lavoro e grazie al quale è stata avviata una fruttuosa e importante collaborazione con il Professor R. L. Taylor che tutti noi ammiriamo e a cui va la mia gratitudine per i molti preziosi suggerimenti.

Grazie alla Dott. Ing. Elena Benvenuti per la sua disponibilità nell'aiutarmi e per la serenità nell'avermi sostenuto in tutta la mia attività.

In ultimo ringrazio tutte le persone che mi sono realmente vicine e che ogni giorno mi dimostrano il loro affetto. Assieme a tutti coloro che purtroppo ho perduto sono e resteranno per sempre nel mio cuore.

Riccardo

Sommario

Introduzione	V
Capitolo I	1
I.1. Il problema elastico lineare.....	1
I.2. Principi variazionali.....	3
I.2.1. Principio di minimo dell'Energia Potenziale Totale.....	4
I.2.2. Principio di minimo dell'Energia Complementare.....	7
I.2.3. Generalizzazione del principio di minimo dell'Energia Potenziale Totale....	8
I.2.4. Principio variazionale di Hellinger-Reissner.....	10
I.2.5. Relazioni tra i principi variazionali.....	11
I.3. Soluzioni deboli classiche: il metodo di Rayleigh-Ritz-Galerkin.....	12
I.4. Elementi finiti agli spostamenti.....	14
I.4.1. Elemento di trave piana rettilinea.....	16
I.4.2. Elemento di trave piana curva.....	23
I.4.3. Elemento di lastra-piastra piana (<i>plate and shell</i>)	27
I.4.4. Limitazioni d'uso degli elementi finiti agli spostamenti.....	38
I.4.5. Esempi numerici di <i>locking</i>	45
Capitolo II	49
II.1. Introduzione.....	49
II.2. Elementi finiti agli spostamenti incompatibili.....	50
II.3. Elementi finiti a più campi basati sul principio di Hu-Washizu.....	52
II.4. Elementi finiti basati sul principio di Hellinger-Reissner.....	55
II.5. Elementi finiti a due campi derivati dal funzionale di Hu-Washizu.....	56
II.6. Elementi finiti ibridi alle tensioni.....	57
II.7. Requisiti di base per elementi misto – ibridi.....	60
II.8. Applicazioni ai modelli strutturali.....	60
II.9. Condizioni di convergenza derivate dalle equazioni al discreto.....	62
II.9.1. <i>Inf-sup test</i>	64
II.9.2. Elementi misto – ibridi ottimali.....	65

II.9.3. Definizione degli <i>Zero Energy Mode (ZEM)</i>	67
II.9.4. <i>Rank condition</i> per elementi misto – ibridi.....	67
II.9.5. Determinazione degli <i>Zero Energy Modes</i>	69
II.10. Metodi pratici per lo studio della convergenza.....	71
Capitolo III	73
III.1. Introduzione.....	73
III.2. Elementi finiti di trave – analisi statica lineare.....	76
III.2.1. Elemento misto – ibrido ottimale a due nodi.....	78
III.2.2. Elemento misto – ibrido ottimale a tre nodi.....	80
III.2.3. <i>Test</i> numerici per travi omogenee.....	82
III.2.4. <i>Test</i> numerici per travi laminate.....	88
III.3. Elementi finiti di lastra – piastra (<i>plate and shell</i>)	93
III.3.1. Elemento misto – ibrido ottimale a quattro nodi.....	97
III.3.2. <i>Test</i> numerici per piastre omogenee.....	98
III.3.3. <i>Test</i> numerici per piastre laminate.....	100
III.4. Conclusioni.....	103
Capitolo IV	107
IV.1. Introduzione.....	107
IV.2. Spostamenti finiti: analisi del secondo ordine.....	108
IV.2.1. Analisi della deformazione.....	108
IV.2.2. Analisi della tensione.....	112
IV.3. Elementi finiti di trave – determinazione del carico critico.....	115
IV.3.1. Elemento misto – ibrido ottimale a due nodi.....	117
IV.3.2. Elemento misto – ibrido ottimale a tre nodi.....	120
IV.3.3. <i>Test</i> numerici per travi omogenee.....	122
IV.3.4. <i>Test</i> numerici per travi laminate.....	126
IV.4. Elementi finiti di lastra-piastra – determinazione del carico critico.....	127
IV.4.1. Elemento misto – ibrido ottimale a quattro nodi.....	129
IV.4.2. <i>Test</i> numerici per piastre omogenee sottili.....	131

IV.4.3. <i>Test</i> numerici per piastre omogenee moderatamente spesse.....	135
IV.4.4. <i>Test</i> numerici per piastre laminate moderatamente spesse.....	136
IV.4.5. Carico critico di travi e lastre-piastre – conclusioni.....	137
IV.5. Delaminazione secondo il modo I di travi piane laminate.....	138
IV.5.1. Modellazione dell'interfaccia.....	139
IV.5.2. Elemento misto – ibrido ottimale di trave a due nodi per lo studio della delaminazione.....	141
IV.5.3. <i>DCB Test</i>	145
IV.5.4. Delaminazione secondo il modo I – conclusioni.....	148
Capitolo V	153
V.1. Introduzione.....	153
V.2. Travi curve piane: teoria tecnica.....	154
V.3. Relazioni di base per lo studio di travi curve piane.....	158
V.4. Elementi finiti di trave curva – analisi statica lineare.....	160
V.4.1. Elemento misto – ibrido ottimale a tre nodi.....	163
V.4.2. <i>Test</i> numerici per travi curve omogenee.....	167
V.5. Conclusioni.....	174
Appendice A	177
A.1. Criteri di convergenza per il metodo di Rayleigh-Ritz-Galerkin.....	177
A.2. Soluzioni approssimate di problemi al contorno.....	184
Appendice B	187
B.1. Analisi delle deformazioni.....	187
B.2. Problemi agli autovalori.....	192
Appendice C	197
C.1. Frattura di un composito laminato secondo il modo I.....	197

Appendice D	203
D.1. Formule di Frénet	203
D.1.1. Curvatura e torsione di una curva.....	204
Indice dei simboli	207
Indice analitico	209

Introduzione

ELEMENTI FINITI A PIÙ CAMPI PER LO STUDIO DI ELEMENTI STRUTTURALI IN COMPOSITO LAMINATO

In elementi strutturali realizzati con laminati compositi, fibro-rinforzati o con materiali fortemente ortotropi a causa del differente comportamento meccanico del materiale nelle diverse direzioni, effetti che di solito possono essere trascurati come la deformabilità tangenziale, l'ingobbamento della sezione e altri fenomeni come la concentrazione degli sforzi assumono una notevole importanza.

Volendo sviluppare in questa tesi alcuni modelli agli elementi finiti per lo studio di strutture di trave piana rettilinea e curvilinea e di lastra-piastra anche moderatamente spessi e in composito laminato si deve tener conto di tutti questi effetti.

In Particolare per ottenere risultati attendibili e nello stesso tempo per contenere l'onere computazionale si sceglie una cinematica della sezione trasversale di tipo *FSDT* e al fine di ovviare ai noti problemi di *locking*, affrontati nei vari capitoli della tesi, si sceglie un approccio di tipo misto – ibrido nelle deformazioni.

Nel **Capitolo I** sono considerati i principi variazionali alla base dei moderni metodi agli elementi finiti approfondendo, in particolare, le relazioni tra di essi.

Vengono inoltre discussi, a partire dal metodo di Rayleigh-Ritz-Galerkin (approfondito in Appendice A), i più comuni elementi finiti agli spostamenti basati sul principio di minimo dell'energia potenziale totale.

Sono presentati, dopo una breve trattazione dei relativi modelli strutturali, un elemento finito di trave, rettilinea, piana a 2 nodi in cui siano trascurabili le deformazioni tangenziali (Eulero-Bernoulli) o meno (Timoshenko); un elemento finito di trave, curva, piana a 3 nodi, deformabile a taglio e un elemento finito di lastra-piastra (*plate and shell*) deformabile a taglio a 4 nodi.

Viene mostrato, tramite esempi numerici, che questo tipo di elementi è soggetto a fenomeni di *shear* e di *membrane-locking* di cui si riporta una breve trattazione.

Nel **Capitolo II** si trattano, invece, le metodologie comunemente utilizzate per ovviare ai fenomeni di *locking* degli elementi standard agli spostamenti.

In particolare l'attenzione viene focalizzata sui metodi misto – ibridi basati sui principi variazionali di Hu-Washizu (utilizzato nei Capitoli successivi), di Hellinger-Reissner e approcci alle tensioni.

La seconda parte del Capitolo tratta invece la convergenza dei metodi misto – ibridi con particolare interesse a criteri empirici, comunemente utilizzati e di facile impiego, capaci, almeno in parte, di garantire stabilità del metodo.

Nel **Capitolo III** sono presentati elementi finiti misto – ibridi per l'analisi statica lineare di strutture monodimensionali e bidimensionali piane anche laminate.

Si sviluppano in merito un elemento di trave rettilinea deformabile a taglio a 2 e a 3 nodi e un elemento di lastra-piastra deformabile a taglio a 4 nodi.

Dopo aver mostrato, attraverso *test* numerici, l'assenza dei fenomeni di *locking* si riportano, con particolare interesse al caso dei laminati compositi, gli andamenti delle tensioni normali e tangenziali sulla sezione retta e le curve di convergenza, per vari casi di carico, alle soluzioni di riferimento.

Nel **Capitolo IV** viene affrontato il problema della stabilità dell'equilibrio per strutture anche laminate.

Nella prima parte si introduce brevemente il problema dei grandi spostamenti e delle deformazioni finite (Appendice B) focalizzando l'attenzione sugli aspetti di cui si deve tener conto nella formalizzazione degli elementi finiti.

Nella seconda parte sono proposti e testati gli elementi finiti misto – ibridi per travi e piastre omogenee e laminate anche deformabili a taglio per la determinazione del carico critico euleriano e del relativo modo critico. Un ulteriore approfondimento è riportato in Appendice B.

Infine viene considerato il fenomeno della delaminazione dei compositi laminati. Dopo una breve introduzione al problema (Appendice C) viene sviluppato un elemento di trave deformabile a taglio a 2 nodi capace di condensare al proprio interno tutte le informazioni del multistrato e dell'interfaccia sulla quale si sviluppa la delaminazione.

Nel **Capitolo V**, dopo una breve trattazione relativa alle strutture ad asse curvo (Appendice D), sono sviluppati due differenti elementi misto – ibridi a 3 nodi per travi curve omogenee e deformabili a taglio.

Nei *test* numerici proposti, oltre alla riprova di totale assenza di fenomeni di *locking* (in particolare di *membrane-locking*), si riportano i dati relativi alle curve di convergenza degli elementi finiti curvi presentati alle soluzioni di riferimento.

Capitolo I

ELEMENTI FINITI AGLI SPOSTAMENTI

I.1. Il problema elastico lineare

Il problema dell'equilibrio elastico per i solidi deformabili (Figura I.1.1.) consiste nella determinazione dei campi di spostamento (\underline{u}), di tensione ($\underline{\sigma}$) e di deformazione ($\underline{\varepsilon}$) sull'intero corpo [Gambarotta e al., 2003].

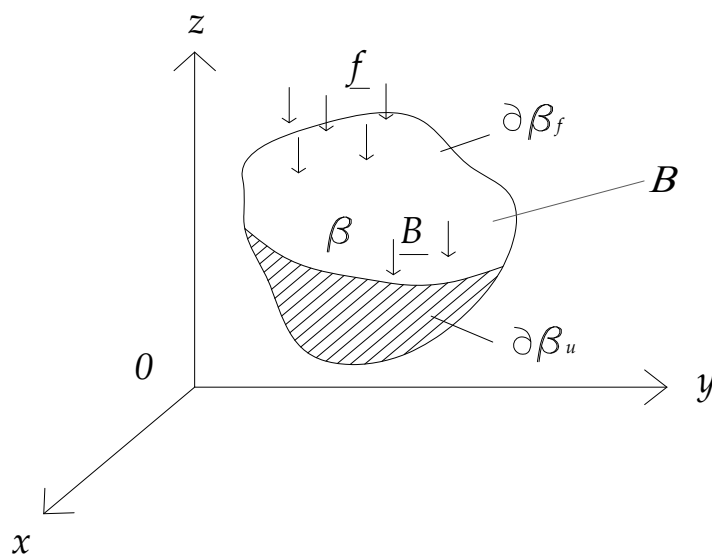


Figura I.1.1: Dominio fisico, condizioni di carico e di vincolo per un solido B .

Più specificatamente si considera un solido B che nella configurazione corrente occupa il volume β ed è delimitato dalla frontiera $\partial\beta$, tale che:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta = \beta \cup \partial\beta \in \mathbb{R}^3 \\ \beta \text{ è } \textit{monoconnesso} \\ \partial\beta \text{ è } \textit{sufficientemente regolare} \\ \partial\beta = \partial\beta_u \cup \partial\beta_f \end{array} \right.$$

Si noti che la frontiera $\partial\beta$ del solido è separabile senza ambiguità in una porzione $\partial\beta_u$ vincolata (sulla quale sono imposti spostamenti \bar{u} , eventualmente ma non necessariamente nulli) e in una parte $\partial\beta_f$ caricata da forze di superficie di assegnate componenti cartesiane f_i ($i = x, y, z$). Peraltro il solido è soggetto a forze di volume di componenti B_i ($i = x, y, z$) agenti in tutti i punti interni. Dal punto di vista matematico si deve risolvere un sistema di 15 equazioni (in parte algebriche e in parte differenziali alle derivate parziali) nelle 15 incognite sopra citate. Nello specifico caso di materiali iperelastici lineari, omogenei e isotropi, si hanno le seguenti equazioni di equilibrio (I.1.1.a), di compatibilità tra spostamenti e deformazioni (I.1.1.b) e costitutive (I.1.1.c) scritte nella forma inversa (legge di Hooke):

$$\begin{aligned}
 a) \quad & \begin{cases} \underline{\text{div}}(\underline{\underline{\sigma}}) + \underline{B} = \underline{0} & \text{ovvero per componenti } \sigma_{ij,j} + B_j = 0 & \text{in } \beta \\ \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^T & \text{ovvero per componenti } \sigma_{ij} = \sigma_{ji} & \text{in } \beta \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{f} & \text{ovvero per componenti } \sigma_{ij}n_j = f_i & \text{su } \partial\beta_f \end{cases} \\
 b) \quad & \begin{cases} \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \cdot [\nabla u + (\nabla u)^T] & \text{ovvero per componenti } \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) & \text{in } \beta \\ \underline{u} = \bar{u} & \text{ovvero per componenti } u_i = \bar{u}_i & \text{su } \partial\beta_u \end{cases} \quad (\text{I.1.1}) \\
 c) \quad & \begin{cases} \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} & \text{ovvero per componenti } \varepsilon_{ij} = C_{ijhk} \sigma_{hk} \rightarrow \end{cases} \begin{cases} \varepsilon_{11} = [\sigma_{11} + \nu \cdot (\sigma_{22} + \sigma_{33})] / E \\ \varepsilon_{22} = [\sigma_{22} + \nu \cdot (\sigma_{11} + \sigma_{33})] / E \\ \varepsilon_{33} = [\sigma_{33} + \nu \cdot (\sigma_{11} + \sigma_{22})] / E \\ 2\varepsilon_{12} = \gamma_{12} = \tau_{12} / G \\ 2\varepsilon_{13} = \gamma_{13} = \tau_{13} / G \\ 2\varepsilon_{23} = \gamma_{23} = \tau_{23} / G \end{cases}
 \end{aligned}$$

Nelle (I.1.1.c) compaiono le costanti elastiche di uso ingegneristico E , modulo di elasticità longitudinale (o di Young), ν , coefficiente di contrazione trasversale (o di Poisson), $G = E/[2(1+\nu)]$, modulo di elasticità tangenziale.

La ricerca di una soluzione esplicita del sistema (I.1.1) risulta molto complicata e in generale per geometrie e condizioni di carico qualsiasi non è possibile. Si ricorda tuttavia che una soluzione per casi di interesse ingegneristico è fornita dalla trattazione di *De Saint-Venant* per solidi snelli di forma prismatica o cilindrica.

I.2. Principi variazionali

Come è noto, a partire dagli anni '60 del secolo XX, è stato possibile ottenere soluzioni sufficientemente accurate del problema dell'equilibrio elastico per solidi deformabili utilizzando il *metodo degli elementi finiti*, per il quale il generico dominio viene approssimato con un assemblaggio di un numero (finito) di elementi di dimensioni finite tra loro connessi.

I campi di spostamento vengono approssimati, all'interno del singolo elemento, mediante combinazioni lineari di funzioni semplici (di solito polinomiali); i coefficienti della combinazione lineare sono rappresentati dagli spostamenti di punti specifici del dominio detti *nodi* situati, nella maggior parte dei casi, sui bordi degli elementi finiti (Figura I.2.1).

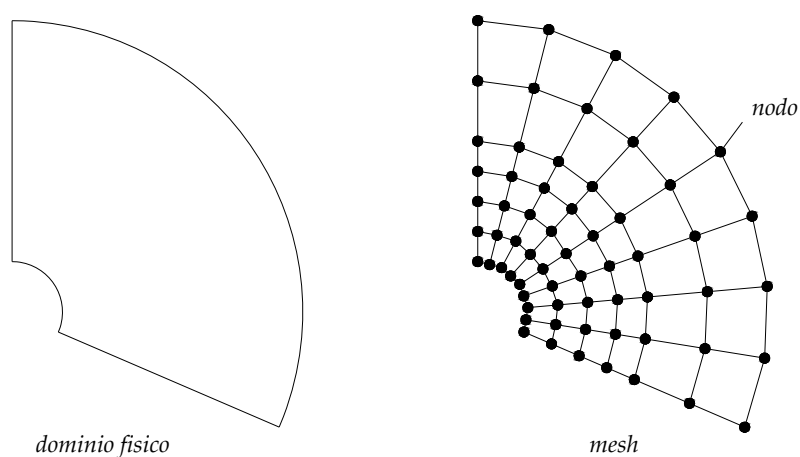


Figura I.2.1: Dominio fisico e corrispondente discretizzazione a elementi finiti (*mesh*).

In Figura I.2.1. si osserva l'insieme degli elementi finiti, detto *mesh*, che approssimano il dominio fisico. Si noti che nel caso considerato la frontiera del dominio è rappresentata in modo approssimato poiché nei tratti curvilinei la frontiera viene sostituita da una spezzata rettilinea. Questa approssimazione, non sempre necessaria, è comunque ritenuta accettabile nella maggior parte delle applicazioni; per superarla occorre utilizzare campi di spostamento più ricchi all'interno dell'elemento e fare ricorso a un maggior numero di nodi.

Il comportamento meccanico di ciascun elemento è rappresentato algebricamente da una matrice, detta *matrice di rigidezza (dell'elemento)* $[K_e]$, che definisce la relazione tra gli spostamenti dei nodi dell'elemento e le corrispondenti forze nodali.

In analogia a quanto detto a proposito del singolo elemento, l'intera *mesh* è sua volta rappresentata in termini meccanici da una matrice, detta *matrice di rigidezza (globale)* $[K]$, generata dall'assemblaggio di tutte le matrici di rigidezza degli elementi.

Il problema statico può essere quindi ricondotto alla determinazione degli spostamenti $\{q\}$ dei nodi non vincolati e in forma matriciale si presenta come segue:

$$\underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{q}} = \underline{\underline{Q}}, \quad (I.2.2)$$

Dove $\{Q\}$ rappresenta il *vettore (noto) dei carichi nodali*.

Il sistema di equazioni lineari (I.2.2.) consente di determinare il vettore (incognito) degli spostamenti nodali, $\{q\}$, grazie al quale è si può ottenere una soluzione approssimata del campo di spostamento sull'intero dominio; quindi, mediante le equazioni di compatibilità, si può calcolare il tensore di deformazione e tramite il legame costitutivo risalire al tensore degli sforzi.

L'intera procedura consente di risolvere il problema dell'equilibrio elastico in maniera approssimata. L'accuratezza dei risultati sarà tanto maggiore quanto migliore sarà la *mesh* in termini di numero di elementi finiti e di metodo utilizzato per modellare le proprietà dei singoli elementi finiti.

In elasticità la modellazione matematica degli elementi finiti può essere basata sui principi variazionali, in particolare il principio di minimo dell'Energia Potenziale Totale o di quella Complementare, il principio variazionale di Hu-Washizu e il principio variazionale di Hellinger-Reissner, [Pian, Wu; 2006].

I.2.1. Principio di minimo dell'Energia Potenziale Totale

Il principio di minimo dell'Energia Potenziale Totale (E.P.T.), [si veda Washizu; 1982], consente di determinare la soluzione del problema elastico formulato in termini del solo campo di spostamento. Si parte dal principio dei Lavori Virtuali (P.L.V.) e si

ricorda che la densità di energia di deformazione elastica $\Phi = \Phi(\varepsilon_{xx}, \dots, \gamma_{xy})$ è derivabile dalla relazione costitutiva, e per materiali isotropi, fornisce:

$$\Phi(\varepsilon) = \frac{E\nu}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \cdot (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})^2 + G \cdot (\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{zz}^2) + \frac{G}{2} \cdot (\gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{xy}^2) \quad (\text{I.2.1.1})$$

Introducendo le condizioni di compatibilità tra spostamenti e deformazioni (I.1.1.c) la (I.2.1.1) diventa:

$$\begin{aligned} \Phi(\varepsilon) = & \frac{E\nu}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \cdot \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 + G \cdot \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \right] \\ & + \frac{G}{2} \cdot \left[\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 \right] = \Phi(u_x, u_y, u_z) \end{aligned} \quad (\text{I.2.1.2})$$

Se si assume l'esistenza della funzione *energia di deformazione* il P.L.V. si può scrivere nella forma:

$$\begin{aligned} & \delta \int_{\beta} \left(\sigma_{xx} \frac{\partial \delta u_x}{\partial x} + \dots + \tau_{xy} \cdot \left(\frac{\partial \delta u_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta u_y}{\partial x} \right) \right) dV \\ & - \int_{\beta} (B_x \cdot \delta u_x + B_y \cdot \delta u_y + B_z \cdot \delta u_z) dV \\ & - \int_{\partial\beta_f} (f_x \cdot \delta u_x + f_y \cdot \delta u_y + f_z \cdot \delta u_z) dA = 0, \end{aligned} \quad (\text{I.2.1.3})$$

Dove il primo termine rappresenta il lavoro interno compiuto dagli sforzi per i corrispondenti incrementi virtuali di deformazione; gli altri due termini rappresentano invece il lavoro esterno compiuto rispettivamente dalle forze di volume e di superficie per i corrispondenti incrementi virtuali degli spostamenti.

Se si assume che le forze di volume \underline{B} e le forze di superficie f siano derivabili dalle funzioni potenziale $\Omega = \Omega(u_x, u_y, u_z)$ e $\Psi = \Psi(u_x, u_y, u_z)$ tali che:

$$\begin{cases} -\delta\Omega = B_x \cdot \delta u_x + B_y \cdot \delta u_y + B_z \cdot \delta u_z \\ -\delta\Psi = f_x \cdot \delta u_x + f_y \cdot \delta u_y + f_z \cdot \delta u_z, \end{cases} \quad (\text{I.2.1.4})$$

allora la (I.2.1.3) diventa:

$$\delta\Pi = 0. \quad (\text{I.2.1.5})$$

Questa può essere interpretata come la condizione di stazionarietà di un funzionale, Π , dipendente dalle sole componenti di spostamento e così definito:

$$\Pi = \int_{\beta} \left[\Phi(u_x, u_y, u_z) + \Omega(u_x, u_y, u_z) \right] dV + \int_{\partial\beta_f} \Psi(u_x, u_y, u_z) dA. \quad (I.2.1.6)$$

Esso rappresenta l'Energia Potenziale Totale. Secondo il principio di minimo dell'E.P.T. la configurazione cinematicamente ammissibile rispetto alla quale l'E.P.T. è minima è quella di equilibrio [‡].

‡ *Teorema di Minimo dell'E.P.T.* [si veda Corradi; 1992].

L'Energia Potenziale Totale e la sua variazione prima sono:

$$\Pi = \int_{\beta} \Phi(\varepsilon_{ij}) dV - \int_{\beta} (B_j \cdot u_j) dV - \int_{\partial\beta_f} (f_j \cdot u_j) dA$$

$$\delta\Pi = \int_{\beta} \left[\frac{\partial\Phi(\varepsilon_{ij})}{\partial\varepsilon_{ij}} \delta\varepsilon_{ij} \right] dV - \int_{\beta} (B_j \cdot \delta u_j) dV - \int_{\partial\beta_f} (f_j \cdot \delta u_j) dA$$

tenuto quindi conto che, per congruenza:

$$\begin{cases} \delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}) & \text{in } \beta; \\ \delta u_i = 0 & \text{su } \partial\beta_u \end{cases}$$

e detto

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial\Phi(\varepsilon_{ij})}{\partial\varepsilon_{ij}} \quad \text{lo sforzo corrispondente alla generica soluzione congruente,}$$

se si applica il teorema di Gauss – Green si trova:

$$\int_{\partial\beta} (\sigma_{ij} n_i u_j) dA = \int_{\beta} \left[\sigma_{ij} \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \right] dV + \int_{\beta} (\sigma_{ij,i} u_j) dV.$$

Ne segue che:

$$\int_{\beta} \left[\sigma_{ij} \frac{1}{2}(\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}) \right] dV = \int_{\beta} (\sigma_{ij} n_i \delta u_j) dA - \int_{\beta} (\sigma_{ij,i} \delta u_j) dV.$$

Quindi:

$$\delta\Pi = - \int_{\beta} [(\sigma_{ij,j} + B_i) \cdot \delta u_i] dV + \int_{\partial\beta_f} [(\sigma_{ij} n_j - f_i) \cdot \delta u_i] dA;$$

nei termini scritti tra parentesi tonde si riconoscono le equazioni di equilibrio indefinite e al contorno:

$$\begin{cases} (\sigma_{ij,j} + B_i) = 0 & \text{in } \beta; \\ \sigma_{ij} n_j = f_i & \text{su } \partial\beta_f; \end{cases}$$

e quindi, in condizioni di equilibrio si ha:

$$\delta\Pi = 0.$$

I.2.2. Principio di minimo dell'Energia Complementare

Procedendo in modo simile, se si parte dal principio Complementare dei Lavori Virtuali (P.C.L.V.), [si veda *Washizu; 1982*], è possibile derivare il principio di minimo dell'Energia Complementare (E.C.).

La densità di energia complementare elastica $\Phi_C = \Phi_C(\sigma_{xx}, \dots, \tau_{xy})$ è per un solido elastico isotropo:

$$\Phi_C(\underline{\underline{\sigma}}) = \frac{1}{2E} \cdot \left[(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})^2 + 2(1+\nu) \cdot (\tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{xy}^2 - \sigma_{yy}\sigma_{zz} - \sigma_{xx}\sigma_{zz} - \sigma_{xx}\sigma_{yy}) \right] \quad (I.2.2.1)$$

Se si assume l'esistenza della funzione Energia Complementare il P.C.L.V. si scrive:

$$\delta \int_{\beta} \left[\Phi_C(\sigma_{xx}, \dots, \tau_{xy}) \right] dV - \int_{\partial\beta} (u_x \cdot \delta f_x + u_y \cdot \delta f_y + u_z \cdot \delta f_z) dA = \delta \Pi_C = 0. \quad (I.2.2.2)$$

Quindi:

$$\Pi_C = \int_{\beta} \left[\Phi_C(\sigma_{xx}, \dots, \tau_{xy}) \right] dV - \int_{\partial\beta_u} (u_x \cdot f_x + u_y \cdot f_y + u_z \cdot f_z) dA, \quad (I.2.2.3)$$

che rappresenta l'Energia Complementare. Secondo il principio di minimo dell'E.C. un campo tensionale ammissibile che soddisfi le equazioni di equilibrio, sia in sede indefinita, sia al contorno, rappresenta la soluzione se l'E.C. è minima.

L'interpretazione grafica, nel caso monodimensionale, dell'E.P.T. e dell'E.C. è illustrata in Figura I.2.2.1. in cui le aree OSP e OSR rappresentano rispettivamente le densità di Energia Potenziale Totale e di Energia Complementare.

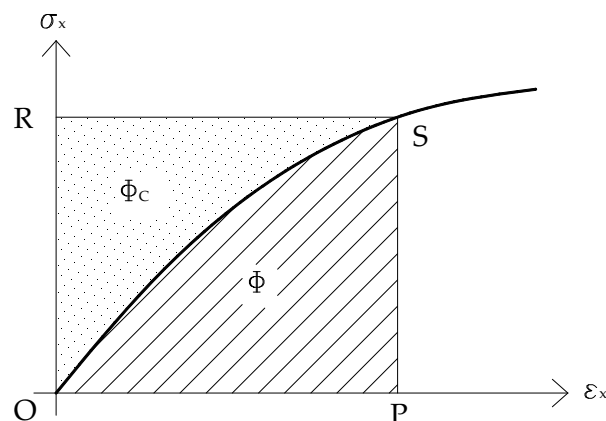


Figura I.2.2.1: Energia di Potenziale e Complementare nel caso di tensione uniaassiale.

1.2.3. Generalizzazione del principio di minimo dell'Energia Potenziale Totale

Nel paragrafo I.2.1 il principio di minimo dell'Energia Potenziale Totale è stato ricavato a partire dal P.L.V. facendo le seguenti ipotesi:

- 1) Si assume che esista una funzione di stato, definita positiva, $\Phi = \Phi(\varepsilon_{xx}, \dots, \gamma_{xy})$ da cui si può ottenere la relazione tra tensioni e deformazioni: $\sigma_{ij} = \partial\Phi/\partial\varepsilon_{ij}$.
- 2) Si considera soddisfatta la compatibilità fra spostamenti e deformazioni (relazione I.1.1.c).
- 3) Si assume che i campi di spostamento u_x , u_y e u_z soddisfino le condizioni geometriche al bordo.
- 4) Si ammette che le forze di volume \underline{B} e quelle di superficie f possano essere ricavate dalle due funzioni potenziale $\Omega = \Omega(u_x, u_y, u_z)$ e $\Psi = \Psi(u_x, u_y, u_z)$.

Si è quindi dimostrato che la configurazione di equilibrio è quella che minimizza il funzionale (I.2.1.6).

Rimuovendo le ipotesi 2) e 3) ed introducendo 9 moltiplicatori di Lagrange $\tilde{\sigma}_{xx}, \tilde{\sigma}_{yy}, \dots, \tilde{\tau}_{xy}$ e $\tilde{p}_x, \tilde{p}_y, \tilde{p}_z$ definiti rispettivamente in β e in $\partial\beta_u$ è possibile generalizzare il principio di minimo dell'Energia Potenziale Totale ottenendo:

$$\begin{aligned}
\Pi_I = & \int_{\beta} \left[\Phi(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \dots, \gamma_{xy}) - (B_x \cdot u_x + B_y \cdot u_y + B_z \cdot u_z) \right] dV \\
& - \int_{\beta} \left[\tilde{\sigma}_{xx} \cdot \left(\varepsilon_{xx} - \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + \tilde{\sigma}_{yy} \cdot \left(\varepsilon_{yy} - \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \tilde{\sigma}_{zz} \cdot \left(\varepsilon_{zz} - \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right. \\
& \left. + \tilde{\tau}_{yz} \cdot \left(\gamma_{yz} - \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) + \tilde{\tau}_{xz} \cdot \left(\gamma_{xz} - \frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) + \tilde{\tau}_{xy} \cdot \left(\gamma_{xy} - \frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right] dV \quad (I.2.3.1) \\
& - \int_{\partial\beta_f} (f_x \cdot u_x + f_y \cdot u_y + f_z \cdot u_z) dA \\
& - \int_{\partial\beta_u} \left[(u_x - \bar{u}_x) \cdot \tilde{p}_x + (u_y - \bar{u}_y) \cdot \tilde{p}_y + (u_z - \bar{u}_z) \cdot \tilde{p}_z \right] dA.
\end{aligned}$$

La configurazione rispetto alla quale questo funzionale è minimo è quella di equilibrio. Le quantità indipendenti soggette a variazioni in (I.2.3.1) sono $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \dots, \gamma_{xy}; u_x, u_y, u_z; \tilde{\sigma}_{xx}, \tilde{\sigma}_{yy}, \dots, \tilde{\tau}_{xy}; \tilde{p}_x, \tilde{p}_y$ e \tilde{p}_z , dal momento che non sono state imposte condizioni il funzionale è libero.

Calcolando la variazione di Π_I e applicando il teorema di Gauss-Green si ottiene:

$$\begin{aligned}
\delta\Pi_I = & \int_{\beta} \left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_{xx}} - \tilde{\sigma}_{xx} \right) \cdot \delta\varepsilon_{xx} + \dots + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_{xy}} - \tilde{\tau}_{xy} \right) \cdot \delta\gamma_{xy} \right. \\
& - \left(\varepsilon_{xx} - \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \cdot \delta\tilde{\sigma}_{xx} - \dots - \left(\gamma_{xy} - \frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \cdot \delta\tilde{\tau}_{xy} \\
& - \left. \left(\frac{\partial\tilde{\sigma}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tilde{\tau}_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tilde{\tau}_{xz}}{\partial z} + B_x \right) \cdot \delta u_x - \dots - \left(\frac{\partial\tilde{\tau}_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tilde{\tau}_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial\tilde{\sigma}_{zz}}{\partial z} + B_z \right) \cdot \delta u_z \right] dV \\
& - \int_{\partial\beta_f} \left[(f_x - \bar{f}_x) \cdot \delta u_x + \dots + (f_z - \bar{f}_z) \cdot \delta u_z \right] dA \\
& - \int_{\partial\beta_u} \left[(u_x - \bar{u}_x) \cdot \delta\tilde{p}_x + \dots + (u_z - \bar{u}_z) \cdot \delta\tilde{p}_z \right] dA \\
& + \int_{\partial\beta_u} \left[(f_x - \tilde{p}_x) \cdot \delta u_x + \dots + (f_z - \tilde{p}_z) \cdot \delta u_z \right] dA,
\end{aligned} \tag{I.2.3.2}$$

dove si è posto $\bar{f}_i = \sigma_{ij} n_j$. Dalle condizioni di stazionarietà di (I.2.3.2) si ottiene:

$$\begin{aligned}
(a) \quad & \tilde{\sigma}_{ij} = \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_{ij}} = C_{ijhk} \varepsilon_{hk} && \text{in } \beta \\
(b) \quad & \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}; \dots; \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}; && \text{in } \beta \\
(c) \quad & \tilde{\sigma}_{ij,j} + B_i = 0 && \text{in } \beta \\
(d) \quad & f_i = \bar{f}_i && \text{su } \partial\beta_f \\
(e) \quad & u_i = \bar{u}_i && \text{su } \partial\beta_u \\
(f) \quad & \tilde{p}_i = f_i && \text{su } \partial\beta_u
\end{aligned} \tag{I.2.3.3}$$

Nell'ordine, nelle (I.2.3.3), si riconoscono le equazioni costitutive (ciò che porta a identificare i moltiplicatori di Lagrange $\tilde{\sigma}_{ij}$ con le componenti dello sforzo), le condizioni di compatibilità tra spostamenti e deformazioni, le equazioni di equilibrio locali e al bordo, le condizioni geometriche al bordo e di equilibrio sul bordo vincolato (il che significa che i moltiplicatori di Lagrange \tilde{p}_i coincidono con le reazioni vincolari).

Eliminando i moltiplicatori di Lagrange \tilde{p}_x , \tilde{p}_y e \tilde{p}_z è possibile ottenere un'ulteriore espressione del principio variazionale.

Se nell'espressione (I.2.3.2) si impone il soddisfacimento dell'ultima delle (I.2.3.3) l'ultimo integrale si annulla e si ottiene:

$$\begin{aligned} \Pi_{II} = & \int_{\beta} \left[\Phi(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \dots, \gamma_{xy}) - (B_x \cdot u_x + B_y \cdot u_y + B_z \cdot u_z) \right] dV \\ & - \int_{\beta} \left[\tilde{\sigma}_{xx} \cdot \left(\varepsilon_{xx} - \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + \dots + \tilde{\tau}_{yz} \cdot \left(\gamma_{yz} - \frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \right] dV \\ & - \int_{\partial\beta_f} (f_x \cdot u_x + f_y \cdot u_y + f_z \cdot u_z) dA - \int_{\partial\beta_u} \left[(u_x - \bar{u}_x) \cdot f_x + (u_y - \bar{u}_y) \cdot f_y + (u_z - \bar{u}_z) \cdot f_z \right] dA, \end{aligned} \quad (I.2.3.4)$$

integrando per parti:

$$\begin{aligned} \Pi^{HW} = & \int_{\beta} \left[(\sigma_{xx} \cdot \varepsilon_{xx} + \dots + \tau_{xy} \cdot \gamma_{xy}) - \Phi(\varepsilon_{xx}, \dots, \gamma_{xy}) \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + B_x \right) \cdot u_x + (\dots) \cdot u_y + (\dots) \cdot u_z \right] dV \\ & + \int_{\partial\beta_f} \left[(f_x - \bar{f}_x) \cdot u_x + (f_y - \bar{f}_y) \cdot u_y + (f_z - \bar{f}_z) \cdot u_z \right] dA - \int_{\partial\beta_u} \left[f_x \cdot \bar{u}_x + f_y \cdot \bar{u}_y + f_z \cdot \bar{u}_z \right] dA. \end{aligned} \quad (I.2.3.5)$$

Le quantità indipendenti soggette a variazioni in (I.2.3.5) sono $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \dots, \gamma_{xy}; u_x, u_y, u_z$ e $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \dots, \tau_{xy}$; ancora una volta senza condizioni accessorie. Questo funzionale libero è anche detto di *Hu-Washizu*, [Washizu; 1982].

1.2.4. Principio variazionale di Hellinger-Reissner

Casi particolari del principio generalizzato I.2.3.1. sono il principio di minimo dell'Energia Complementare ed il principio di *Hellinger-Reissner*. Se si vogliono eliminare i coefficienti $\delta\varepsilon_{xx}, \delta\varepsilon_{yy}, \dots, \delta\gamma_{xy}$ dall'espressione di $\delta\Pi_I$ è necessario che la prima delle (I.2.3.3) sia soddisfatta a priori, quindi (I.2.3.1) diventa:

$$\begin{aligned} \Pi_R = & \int_{\beta} \left[\tilde{\sigma}_{xx} \cdot \frac{\partial u_x}{\partial x} + \tilde{\sigma}_{yy} \cdot \frac{\partial u_y}{\partial y} + \dots + \tilde{\tau}_{yz} \cdot \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \right. \\ & \left. - \Phi_C(\sigma_{xx}, \dots, \tau_{xy}) - (B_x \cdot u_x + B_y \cdot u_y + B_z \cdot u_z) \right] dV \\ & - \int_{\partial\beta_f} (f_x \cdot u_x + f_y \cdot u_y + f_z \cdot u_z) dA - \int_{\partial\beta_u} \left[(u_x - \bar{u}_x) \cdot \tilde{p}_x + (u_y - \bar{u}_y) \cdot \tilde{p}_y + (u_z - \bar{u}_z) \cdot \tilde{p}_z \right] dA, \end{aligned} \quad (I.2.4.1)$$

l'eliminazione delle componenti di deformazione consente di diminuire il numero di variabili che passa a 12 ($u_x, u_y, u_z; \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \dots, \tau_{xy}$ e \tilde{p}_x, \tilde{p}_y e \tilde{p}_z), senza condizioni accessorie, il funzionale libero (I.2.4.1) è detto di *Hellinger-Reissner*, [Washizu; 1982].

I.3. Soluzioni deboli classiche: il metodo di Rayleigh-Ritz-Galerkin

La soluzione del problema dell'equilibrio elastico può essere determinata imponendo la stazionarietà di alcuni funzionali come quelli presentati in § 1.2, [Corradi; 1992]. Ad esempio, come si è detto al paragrafo (I.2.1), nell'insieme dei campi di spostamento *cinematicamente ammissibili*, la configurazione che verifica anche l'equilibrio è quella che rende stazionaria l'Energia Potenziale Totale (E.P.T.). In termini di variabili generalizzate, il funzionale E.P.T. si scrive come segue:

$$\Pi(\underline{u}) = \int_{\beta} \Phi(\underline{\underline{\varepsilon}}) dV - L_{ext}, \quad (I.3.1)$$

dove:

$$\Phi(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}^T \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}, \quad (I.3.2)$$

rappresenta la densità di energia di deformazione, in cui $\underline{\underline{C}}$ è la matrice costitutiva mentre $\underline{\underline{\varepsilon}}$ è il tensore di deformazione. L_{ext} è invece il lavoro dei carichi esterni.

In questo caso il funzionale E.P.T. è definito sull'intero dominio del solido considerato e quindi tutte le variabili che vi compaiono sono campi estesi all'intero dominio. In particolare i campi di spostamento, da cui si ricavano quelli di deformazione, devono essere funzioni *cinematicamente ammissibili* sull'intero dominio. La complessità del problema differenziale che si presenta ha suggerito fin dai primi anni del 1900 un metodo di soluzione approssimato detto di *Rayleigh-Ritz-Galerkin* grazie al quale si approssimano in maniera opportuna i campi di spostamento: si giunge così ad una forma approssimata dell'E.P.T. dalla quale si può ricavare una soluzione approssimata del problema in esame.

Il procedimento prevede di sostituire l'effettivo campo di spostamento con un'approssimante ottenuta mediante una combinazione lineare di funzioni che rispettino le condizioni di congruenza assegnate e che quindi rientrino nel dominio di definizione del funzionale (I.3.1). Con l'approssimazione introdotta il campo di spostamento risulta dipendere da un numero finito di parametri (i coefficienti della

combinazione lineare) e il problema della ricerca della condizione di stazionarietà passa da differenziale ad algebrico.

Le funzioni base utilizzate per modellare il campo di spostamenti devono soddisfare queste condizioni:

- Costituire un sottospazio dello spazio funzionale al quale appartiene la soluzione;
- Essere linearmente indipendenti e costituire una base (preferibilmente ortonormale) dello spazio funzionale di appartenenza;
- Costituire un sistema completo ovvero soddisfare:

$$\left\| v - \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \right\| < \varepsilon \quad \forall v \in V \text{ ed } \varepsilon > 0, \quad (1.3.3)$$

dove v rappresenta la generica soluzione e v_i le funzioni base, ciò equivale a dire che la distanza tra un generica soluzione e la sua rappresentazione approssimata può essere resa piccola a piacere. Una trattazione più approfondita è riportata in Appendice A.

Procedendo in questo modo si trova che la configurazione del corpo risulta funzione di un numero finito di parametri liberi, l'E.P.T. risulta funzione di questi stessi e di conseguenza la condizione di stazionarietà si traduce in un sistema algebrico di equazioni. Chiaramente il metodo di Rayleigh-Ritz-Galerkin non fornisce sempre risultati ottimi in quanto è piuttosto improbabile che una combinazione lineare di un numero finito di funzioni semplici comprenda l'espressione corretta del campo di spostamento di un generico problema elastico. La qualità della soluzione è pesantemente influenzata dalle funzioni approssimanti i campi di spostamento che non sempre possono essere adeguatamente rappresentati con un numero limitato di parametri.

In ultimo si deve sottolineare che un'approssimazione soddisfacente per il campo di spostamento talvolta non lo è per le deformazioni, da essi derivate, e per gli sforzi. Il metodo, seppur valido, è poco utilizzato nella pratica perché è difficilmente adattabile a un procedimento generale ma è stato accennato in quanto costituisce la base sulla quale si sono sviluppati i moderni *metodi agli elementi finiti*.

I.4. Elementi finiti agli spostamenti

Sulla scorta del metodo di Rayleigh-Ritz-Galerkin nascono, nella seconda metà del 1900, gli elementi finiti basati sull'approccio agli spostamenti.

Per questa via si giunge a costruire un'approssimante del campo di spostamento non più globale (cioè costruita sull'intero dominio, con le ovvie difficoltà di tener conto delle condizioni al contorno) ma per sottodomini opportunamente raccordati.

Come detto in precedenza, in questo caso, si suddivide il dominio che si vuole studiare in un certo numero di elementi tra loro connessi.

Sui bordi degli elementi si riconoscono poi alcuni punti detti *nod*i ai quali si riferiscono le incognite discretizzate del problema cioè gli spostamenti nodali.

Ad ogni elemento è poi associata una matrice $[K_e]$ detta di rigidità elementare che associa gli spostamenti nodali alle omologhe forze nodali.

La determinazione di questa matrice e del vettore delle forze nodali tramite l'approccio agli spostamenti sarà l'oggetto di questo paragrafo.

Il problema dell'equilibrio elastico dei solidi deformabili è caratterizzato da 15 campi incogniti, gli spostamenti \underline{u} , le deformazioni $\underline{\varepsilon}$ e le tensioni $\underline{\sigma}$ che appaiono nella seguente forma vettoriale, [si veda *Pian, Wu; 2006*]:

$$\begin{cases} \underline{u} = [u_x, u_y, u_z]^T, \\ \underline{\varepsilon} = [\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}]^T, \\ \underline{\sigma} = [\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}]^T, \end{cases} \quad (I.4.1)$$

inoltre si hanno le forze di volume \underline{B} (per unità di volume) e le trazioni superficiali \underline{f} (per unità di superficie):

$$\begin{cases} \underline{B} = [B_x, B_y, B_z]^T, \\ \underline{f} = [f_x, f_y, f_z]^T, \end{cases} \quad (I.4.2)$$

le equazioni di compatibilità tra spostamenti e deformazioni sono, in notazione di Voigt:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} \rightarrow \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{D}}\underline{u}. \quad (I.4.3)$$

Le equazioni di equilibrio al contorno impongono:

$$\begin{bmatrix} n_x & 0 & 0 & 0 & n_z & n_y \\ 0 & n_y & 0 & n_z & 0 & n_x \\ 0 & 0 & n_z & n_y & n_x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \vdots \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} \rightarrow \underline{\underline{n}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} = \underline{f} \text{ su } \partial\beta, \quad (I.4.4)$$

mentre nei punti interni al dominio:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \vdots \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \underline{\underline{D}}^T \underline{\underline{\sigma}} + \underline{B} = \underline{0} \text{ in } \beta. \quad (I.4.5)$$

L'Energia Potenziale Totale diventa:

$$\Pi(\underline{u}) = \int_{\beta} \left[\frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}^T \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{B}^T \underline{u} \right] dV - \int_{\partial\beta_f} \left[\underline{f}^T \underline{u} \right] dA, \quad (I.4.6)$$

discretizzando il continuo materiale in un certo numero di elementi finiti la (I.4.6) diventa:

$$\Pi(\underline{u}) = \sum_{i=1}^{n^{elem}} \left[\int_{\beta_i} \left[\frac{1}{2} (\underline{\underline{D}}\underline{u})^T \underline{\underline{C}} (\underline{\underline{D}}\underline{u}) - \underline{u}^T \underline{B} \right] dV - \int_{\partial\beta_{f_i}} \left[\underline{u}^T \underline{f} \right] dA \right] = \min. \quad (I.4.7)$$

Dove i campi di spostamento sono modellati tramite una combinazione lineare di funzioni dette *funzioni di forma* (N_i) i cui coefficienti sono gli spostamenti nodali:

$$\begin{cases} u_x = \sum_{i=1}^n N_i(x, y, z) \cdot u_{xi} \\ u_y = \sum_{i=1}^n N_i(x, y, z) \cdot u_{yi} \\ u_z = \sum_{i=1}^n N_i(x, y, z) \cdot u_{zi} \end{cases} \rightarrow \underline{u} = \underline{\underline{N}} \cdot \underline{q} \quad (I.4.8)$$

Dove $\underline{q} = [u_{xi}, u_{yi}, u_{zi}]^T$ è il vettore degli spostamenti nodali ed \underline{N} è la matrice delle funzioni di forma.

La matrice di rigidità elementare e il vettore dei carichi nodali risultano quindi:

$$\begin{aligned} \underline{K}_e &= \int_{\beta_i} \left[\left(\underline{DN} \right)^T \underline{C} \left(\underline{DN} \right) \right] dV \\ \underline{Q} &= \int_{\beta_i} \left[\underline{N}^T \underline{B} \right] dV + \int_{\partial\beta_i} \left[\underline{N}^T \underline{f} \right] dA \end{aligned} \quad (\text{I.4.9})$$

Nel seguito questa formulazione sarà adottata per lo sviluppo di alcuni modelli strutturali di travi e piastre.

I.4.1. Elemento di trave rettilinea piana

Il primo modello strutturale di interesse è la trave rettilinea piana deformabile a taglio il cui schema è riportato in Figura I.4.1.1.:

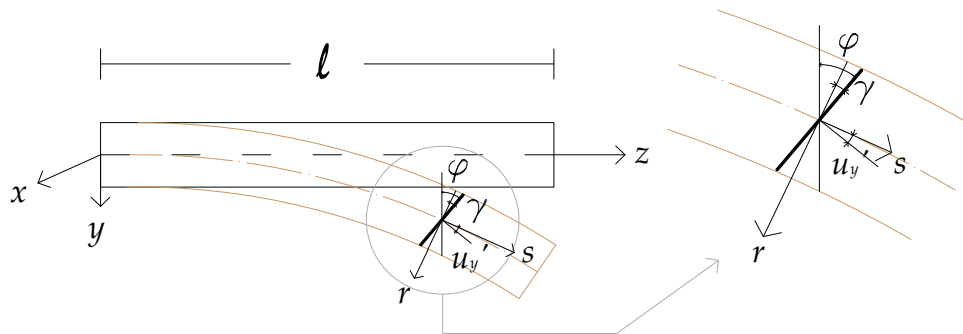


Figura I.4.1.1: Cinematica della trave di Timoshenko.

Le componenti del campo di spostamento s_y, s_z per tutti i punti del solido trave sono esprimibili, nella logica di una teoria strutturale, in funzione degli spostamenti longitudinale u_z e trasversale u_y e della rotazione φ della sezione trasversale, riferiti ai punti della linea d'asse, z :

$$\begin{cases} s_z(y, z) = u_z(z) + y \cdot \varphi(z) \\ s_y(y, z) = u_y(z) \end{cases} \quad (\text{I.4.1.1})$$

Il modello prende il nome di *trave di Timoshenko*, [si veda, per esempio, *Corradi; 1992*], e considera contemporaneamente la presenza di deformabilità assiale, flessionale e tagliante.

Nello specifico le incognite del problema sono le componenti di spostamento (riferite alla linea d'asse) $\underline{u} = [u_z, u_y, \varphi]^T$, le componenti generalizzate di deformazione $\underline{d} = [\varepsilon_0, \gamma, \kappa]^T$ e le componenti dell'azione interna $\underline{S} = [N, T, M]^T$ che, in tutto, costituiscono 9 campi incogniti. Come dati si assegnano condizioni di vincolo alle estremità che assicurino l'assenza di labilità ($\underline{u} = \bar{\underline{u}}$), carichi distribuiti lungo l'asse z $\underline{p} = [p_z, p_y, m]^T$ (rispettivamente diretti secondo le direzioni longitudinale, trasversale e coppie distribuite di asse vettore x) e carichi concentrati agli estremi $\underline{f} = [f_z, f_y, M]^T$ (sotto forma di forze applicate in direzione longitudinale e trasversale e coppie di asse vettore x), le proprietà elastiche del materiale (E, ν) , le caratteristiche geometriche della sezione (A, J, k_T) , rispettivamente area, momento d'inerzia e fattore di riduzione dell'area a taglio $A_s = k_T \cdot A$, e la luce ℓ .

A disposizione si hanno 9 equazioni, 3 equazioni (differenziali) di equilibrio (I.4.1.2.a), 3 equazioni (differenziali) di compatibilità (I.4.1.2.b) e 3 equazioni (algebriche) costitutive (I.4.1.2.c):

$$\begin{aligned}
 a) \quad & \left\{ \begin{aligned} \frac{dN}{dz} + q_z &= 0; & \frac{dT}{dz} + q_y &= 0; & \frac{dM}{dz} - T + m &= 0; \end{aligned} \right. \\
 b) \quad & \left\{ \begin{aligned} \varepsilon_0 &= \frac{du_z}{dz}; & \gamma &= \frac{du_y}{dz} + \varphi; & \kappa &= \frac{d\varphi}{dz}; \end{aligned} \right. & (I.4.1.2) \\
 c) \quad & \left\{ \begin{aligned} N &= EA \cdot \varepsilon_0; & T &= k_T \cdot GA \cdot \gamma; & M &= EJ \cdot \kappa; \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Integrando le equazioni di equilibrio (I.4.1.2.a) si possono ottenere le componenti di sollecitazione che, sostituite nelle equazioni costitutive (I.4.1.2.c), consentono di determinare le componenti generalizzate di deformazione.

Infine, integrando queste ultime (I.4.1.2.b) e considerando le condizioni di equilibrio e di vincolo agli estremi, si può determinare la soluzione in termini di campi di spostamento.

Si osservi che in generale è possibile pensare lo spostamento trasversale u_y come la somma di una componente dovuta solo all'azione flessionale, u_{yf} , e di una, u_{yt} , legata all'azione tagliante (Figura 1.4.1.2.).

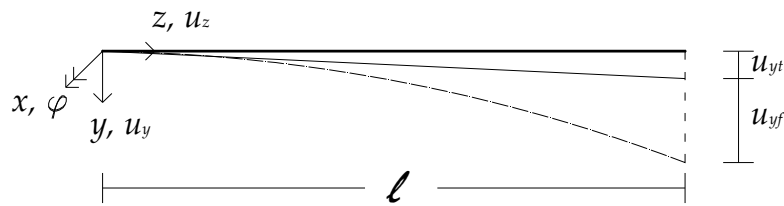


Figura I.4.1.2: Decomposizione dello spostamento trasversale nella trave di Timoshenko.

Nel caso in cui la trave diventi snella la parte di spostamento trasversale dovuta all'azione tagliante diventa trascurabile rispetto a quella flessionale tanto da poter affermare che $u \rightarrow u_{yf}$; in questa ipotesi la deformazione tagliante si annulla, cioè

$\gamma = \frac{du_y}{dz} + \varphi = 0$ e quindi il problema (I.4.1.2) assume la forma seguente:

$$\begin{aligned}
 a) & \left\{ \begin{aligned} \frac{dN}{dz} + q_z &= 0; & \frac{dT}{dz} + q_y &= 0; & \frac{dM}{dz} - T + m &= 0; \end{aligned} \right. \\
 b) & \left\{ \begin{aligned} \varepsilon_0 &= \frac{du_z}{dz}; & \varphi &= -\frac{du_y}{dz}; & \kappa &= \frac{d\varphi}{dz} = -\frac{d^2u_y}{dz^2}; \end{aligned} \right. & (I.4.1.3) \\
 c) & \left\{ \begin{aligned} N &= EA \cdot \varepsilon_0; & M &= EJ \cdot \kappa; \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Il modello strutturale così semplificato prende il nome di *trave di Eulero-Bernoulli* e la cinematica è rappresentata in Figura I.4.1.3.

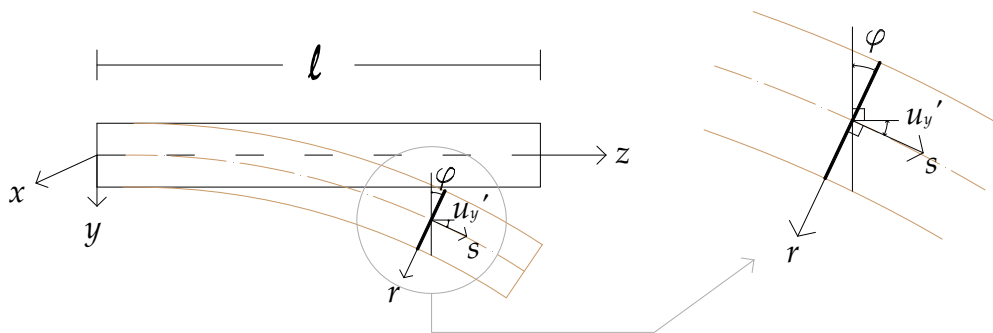


Figura I.4.1.3: Cinematica della trave di Eulero-Bernoulli.

In questo caso le componenti di spostamento dei punti del solido trave sono ancora dati dalle (I.4.1.1), ma in esse la rotazione φ della sezione trasversale è legata alla derivata prima dello spostamento trasversale du_y/dz per effetto della (I.4.1.3.b₂); ciò significa che la rotazione della sezione è legata alla rotazione della linea d'asse sicché anche a deformazione avvenuta la sezione trasversale si mantiene normale alla linea d'asse.

Passando alla discretizzazione, come è ben noto il modello di Eulero-Bernoulli, che richiede la continuità dello spostamento trasversale e della derivata prima, viene usualmente modellato con polinomi interpolanti di Hermite cubici. Nel modello di Timoshenko, invece, spostamenti e rotazioni sono assunti come variabili indipendenti e quindi è sufficiente un'interpolazione minimale (Lagrangiana) dei campi di spostamento e di rotazione. Volendo risolvere i due modelli strutturali con il metodo degli elementi finiti è necessario, come si è detto, utilizzare due differenti approssimazioni per i campi di spostamento:

1) Nel caso della *trave di Timoshenko* l'approccio classico agli spostamenti prevede la modellazione di questi ultimi tramite approssimanti Lagrangiane [‡] che, nel caso di elementi finiti a 2 nodi, sono del primo ordine. Di norma si modellano geometria e spostamenti con le stesse funzioni approssimanti: si può dunque passare dalla coordinata spaziale (z) (Figura I.4.1.2.a) a quella naturale (ξ) (Figura I.4.1.2.b) e si ottiene così un elemento finito lagrangiano isoparametrico.

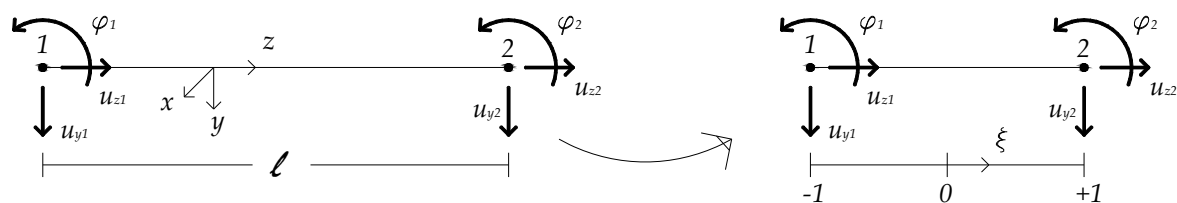


Figura I.4.1.2: Modello agli elementi finiti per la trave di Timoshenko.

Si riporta di seguito lo schema riassuntivo della discretizzazione del problema:

- Modellazione della geometria:

$$\begin{cases} z(\xi) = \frac{1-\xi}{2} \cdot z_1 + \frac{1+\xi}{2} \cdot z_2 = \sum_{i=1}^2 La_i(\xi) \cdot z_i \\ y(\xi) = \frac{1-\xi}{2} \cdot y_1 + \frac{1+\xi}{2} \cdot y_2 = \sum_{i=1}^2 La_i(\xi) \cdot y_i \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{dz}{d\xi} = \sum_{i=1}^2 \frac{dLa_i(\xi)}{d\xi} \cdot z_i \\ \frac{dy}{d\xi} = \sum_{i=1}^2 \frac{dLa_i(\xi)}{d\xi} \cdot y_i \end{cases} \quad (\text{I.4.1.4})$$

‡Polinomi di Lagrange

Le più semplici funzioni polinomiali interpolanti che abbiano come caratteristica di avere valore unitario in un nodo ed essere nulle in tutti gli altri sono i polinomi di Lagrange. Se li si definisce nell'intervallo $-1 \leq \xi \leq +1$, risultano così fatti:

$$La_i(\xi) = \prod_{k \neq i} \left(\frac{\xi_k - \xi}{\xi_k - \xi_i} \right) = \frac{(\xi_1 - \xi) \cdot (\xi_2 - \xi) \cdots (\xi_{i-1} - \xi) \cdot (\xi_{i+1} - \xi) \cdots}{(\xi_1 - \xi_i) \cdot (\xi_2 - \xi_i) \cdots (\xi_{i-1} - \xi_i) \cdot (\xi_{i+1} - \xi_i) \cdots}$$

È agevole verificare che $La_i(\xi_i) = 1$; $La_i(\xi_k) = 0$ ($\forall k \neq i$).

Nelle (I.4.1.4) z_i e y_i ($i=1, 2$) rappresentano le coordinate dei nodi; $La_i(\xi)$ sono i corrispondenti polinomi Lagrangiani.

Da qui è possibile determinare lo Jacobiano della trasformazione:

$$J = \frac{dz}{d\xi}. \quad (\text{I.4.1.5})$$

- Modellazione del campo di spostamenti e derivazione dei campi di deformazione

locali in funzione delle componenti generalizzate $\varepsilon_0 = \frac{du_z}{dz}$; $\kappa = \frac{d\varphi}{dz}$; $\gamma = \frac{du_y}{dz} + \varphi$:

$$\begin{cases} u_z(\xi) = \sum_{i=1}^2 La_i(\xi) \cdot u_{zi} \\ u_y(\xi) = \sum_{i=1}^2 La_i(\xi) \cdot u_{yi} \\ \varphi(\xi) = \sum_{i=1}^2 La_i(\xi) \cdot \varphi_i \end{cases} \quad (\text{I.4.1.6})$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{zz} = \frac{\partial s_z}{\partial z} = \frac{du_z}{dz} + y \frac{d\varphi}{dz} = \varepsilon_0 + y \cdot \kappa = \left[\sum_{i=1}^2 \frac{dLa_i(\xi)}{d\xi} \cdot u_{zi} \right] \cdot \frac{d\xi}{dz} + \left[y \cdot \left(\sum_{i=1}^2 \frac{dLa_i(\xi)}{d\xi} \cdot \varphi_i \right) \right] \cdot \frac{d\xi}{dz} \\ \gamma_{zy} = \frac{\partial s_y}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial y} = \frac{du_y}{dz} + \varphi = \gamma = \left[\sum_{i=1}^2 \frac{dLa_i(\xi)}{d\xi} \cdot u_{yi} \right] \cdot \frac{d\xi}{dz} + \left[\sum_{i=1}^2 La_i(\xi) \cdot \varphi_i \right]. \end{cases}$$

Dalla (I.4.1.6) si riconosce che:

$$\begin{cases} \varepsilon_0 = \left[\sum_{i=1}^2 \frac{dLa_i(\xi)}{d\xi} \cdot u_{zi} \right] \cdot \frac{d\xi}{dz} \\ \kappa = \left[\sum_{i=1}^2 \frac{dLa_i(\xi)}{d\xi} \cdot \varphi_i \right] \cdot \frac{d\xi}{dz} \\ \gamma = \left[\sum_{i=1}^2 \frac{dLa_i(\xi)}{d\xi} \cdot u_{yi} \right] \cdot \frac{d\xi}{dz} + \left[\sum_{i=1}^2 La_i(\xi) \cdot \varphi_i \right]. \end{cases} \quad (\text{I.4.1.7})$$

- Discretizzazione del funzionale dell'Energia Potenziale Totale:

$$\begin{aligned} \Pi(u) &= \int_{\beta} \Phi(\varepsilon) dV - L_{ext} = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \left(EA \cdot \varepsilon_0^2 + EJ \cdot \kappa^2 + GA_s \cdot \gamma^2 \right) dz - \int_0^{\ell} \left(q_z \cdot u_z + q_y \cdot u_y + m \cdot \varphi \right) dz \simeq \\ & \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \left[EA \cdot \left(\sum_{i=1}^2 \frac{dLa_i(\xi)}{d\xi} \cdot u_{zi} \cdot \frac{1}{J} \right)^2 + EJ \cdot \left(y \cdot \sum_{i=1}^2 \frac{dLa_i(\xi)}{d\xi} \cdot \varphi_i \cdot \frac{1}{J} \right)^2 + \right. \\ & \left. + GA_s \cdot \left(\sum_{i=1}^2 \frac{dLa_i(\xi)}{d\xi} \cdot u_{yi} \cdot \frac{1}{J} + \sum_{i=1}^2 La_i(\xi) \cdot \varphi_i \right)^2 \right] J d\xi \\ & - \int_{-1}^{+1} \left(q_z \cdot \left(\sum_{i=1}^2 La_i(\xi) \cdot u_{zi} \right) + q_y \cdot \left(\sum_{i=1}^2 La_i(\xi) \cdot u_{yi} \right) + m \cdot \left(\sum_{i=1}^2 La_i(\xi) \cdot \varphi_i \right) \right) \cdot J \cdot d\xi \end{aligned} \quad (\text{I.4.1.8})$$

Si osservi che si è tenuto conto della (I.4.1.5) sostituendo al termine $d\xi/dz = 1/J$.

È immediato constatare che, una volta imposta la stazionarietà, dall'espressione del potenziale elastico si ricava la matrice di rigidezza dell'elemento:

$$\underline{\underline{K}}_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{GA_s}{\ell} & \frac{GA_s}{2} & 0 & -\frac{GA_s}{\ell} & \frac{GA_s}{2} \\ 0 & \frac{GA_s}{2} & \frac{EJ}{\ell} + \frac{GA_s \ell}{3} & 0 & -\frac{GA_s}{2} & -\frac{EJ}{\ell} + \frac{GA_s \ell}{6} \\ -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{GA_s}{\ell} & -\frac{GA_s}{2} & 0 & \frac{GA_s}{\ell} & -\frac{GA_s}{2} \\ 0 & \frac{GA_s}{2} & -\frac{EJ}{\ell} + \frac{GA_s \ell}{6} & 0 & -\frac{GA_s}{2} & \frac{EJ}{\ell} + \frac{GA_s \ell}{3} \end{bmatrix} \begin{matrix} u_{z1} \\ u_{y1} \\ \varphi_1 \\ u_{z2} \\ u_{y2} \\ \varphi_2 \end{matrix} \quad (\text{I.4.1.9})$$

mentre dal termine corrispondente al lavoro esterno si ottiene il vettore delle forze nodali.

2) Nel caso di *trave di Eulero-Bernoulli* gli spostamenti sono modellati tramite approssimanti Hermitiane [‡] del terzo ordine. Se si formula direttamente l'elemento in coordinate spaziali (Figura I.4.1.3.) il procedimento, simile al caso precedente, si presenta come segue.

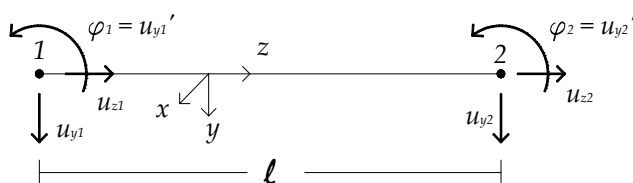


Figura I.4.1.3: Modello agli elementi finiti per la trave di Eulero-Bernoulli.

- Modellazione degli spostamenti e derivazione dei campi di deformazione locale:

$$\begin{cases} u_z(z) = \sum_{i=1}^2 La_i(z) \cdot u_{zi} \\ u_y(z) = H_1(z) \cdot u_{y1} + H_2(z) \cdot u_{y2} + H_3(z) \cdot u_{y1}' + H_4(z) \cdot u_{y2}' \\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial(u_z + y \cdot \varphi)}{\partial z} = \varepsilon_0 + y \cdot \kappa \\ \gamma_{zy} = 0 \end{cases} \quad (\text{I.4.1.10})$$

$$= \left[\sum_{i=1}^2 \frac{dLa_i(z)}{dz} \cdot u_{zi} + y \cdot \frac{d}{dz} (H_1(z) \cdot u_{y1} + H_2(z) \cdot u_{y2} + H_3(z) \cdot u_{y1}' + H_4(z) \cdot u_{y2}') \right]$$

- Discretizzazione del funzionale dell'Energia Potenziale Totale:

$$\begin{aligned}
 \Pi(u) &= \int_{\beta} \Phi(\varepsilon) dV - L_{ext} = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} (EA \cdot \varepsilon_0^2 + EJ \cdot \kappa^2) dz - \int_0^{\ell} (q_z \cdot u_z + q_y \cdot u_y + m \cdot \varphi) dz \simeq \\
 & \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \left[EA \cdot \left(\sum_{i=1}^2 \frac{dLa_i(z)}{dz} \cdot u_{zi} \right)^2 + EJ \cdot \left(y \cdot \frac{d}{dz} (H_1(z) \cdot u_{y1} + H_2(z) \cdot u_{y2} + H_3(z) \cdot u_{y1}' + H_4(z) \cdot u_{y2}') \right)^2 \right] \cdot dz \\
 & - \int_0^{\ell} \left(q_z \cdot \left(\sum_{i=1}^2 La_i(z) \cdot u_{zi} \right) \right) \cdot dz - \int_0^{\ell} \left(q_y \cdot (H_1(z) \cdot u_{y1} + H_2(z) \cdot u_{y2} + H_3(z) \cdot u_{y1}' + H_4(z) \cdot u_{y2}') \right) \cdot dz \\
 & - \int_0^{\ell} \left(m \cdot \left(\frac{d}{dz} (H_1(z) \cdot u_{y1} + H_2(z) \cdot u_{y2} + H_3(z) \cdot u_{y1}' + H_4(z) \cdot u_{y2}') \right) \right) \cdot dz
 \end{aligned} \tag{I.4.1.11}$$

Imponendo la stazionarietà dell'espressione (I.4.1.11), in analogia con l'elemento di trave di Timoshenko, è possibile ricavare la matrice di rigidezza dell'elemento:

$$\underline{\underline{K}}_e = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_{z1} & u_{y1} & \varphi_1 & u_{z2} & u_{y2} & \varphi_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{\ell^3} & \frac{6EJ}{\ell^2} & 0 & -\frac{12EJ}{\ell^3} & \frac{6EJ}{\ell^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{\ell^2} & \frac{4EJ}{\ell} & 0 & -\frac{6EJ}{\ell^2} & \frac{2EJ}{\ell} \\ -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ}{\ell^3} & -\frac{6EJ}{\ell^2} & 0 & \frac{12EJ}{\ell^3} & -\frac{6EJ}{\ell^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{\ell^2} & \frac{2EJ}{\ell} & 0 & -\frac{6EJ}{\ell^2} & \frac{4EJ}{\ell} \end{matrix} & \begin{matrix} u_{z1} \\ u_{y1} \\ \varphi_1 \\ u_{z2} \\ u_{y2} \\ \varphi_2 \end{matrix} \end{matrix} \tag{I.4.1.12}$$

in modo analogo si determina il vettore delle forze nodali.

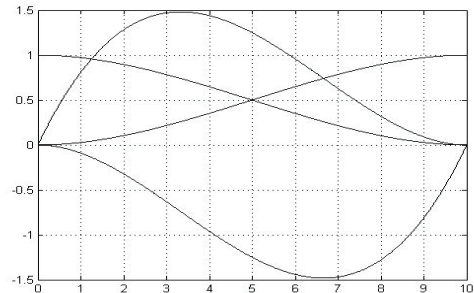
‡ Polinomi di Hermite

I polinomi di Hermite consentono di ricostruire una funzione "v" a partire dalle ordinate e dai valori della derivata nei due estremi dell'intervallo considerato: considerando in particolare l'intervallo $[0, \ell]$ e ponendo $z_1=0; z_2=\ell$ si ha:

$$v(z) = H_1(z) \cdot v(z_1) + H_2(z) \cdot v(z_2) + H_3(z) \cdot v'(z_1) + H_4(z) \cdot v'(z_2)$$

dove:

$$\begin{cases} H_1(z) = \left(1 - 3 \frac{z^2}{\ell^2} + 2 \frac{z^3}{\ell^3} \right) \\ H_2(z) = \left(3 \frac{z^2}{\ell^2} - 2 \frac{z^3}{\ell^3} \right) \\ H_3(z) = \ell \cdot \left(\frac{z}{\ell} - 2 \frac{z^2}{\ell^2} + \frac{z^3}{\ell^3} \right) \\ H_4(z) = \ell \cdot \left(-\frac{z^2}{\ell^2} + \frac{z^3}{\ell^3} \right) \end{cases}$$



Si verifica agevolmente che $H_1(z_1)=1; H_2(z_1)=0; H_3(z_1)=0; H_4(z_1)=0$; analogamente posto $H_i'=dH_i/dz$ si ha: $H_1'(z_1)=0; H_2'(z_1)=0; H_3'(z_1)=1; H_4'(z_1)=0$ e così via.

La modellazione di travi deformabili a taglio interpolando il campo di spostamento trasversale $v(z)$ con polinomi cubici è ancora possibile tramite l'utilizzo di polinomi di Hermite modificati [Reddy, 1997].

I.4.2. Elemento di trave piana curva

Il secondo modello strutturale trattato riguarda la trave curva piana deformabile a taglio, [si veda Ascione, Fraternali, 1986]. La cui cinematica è riportata in Figura I.4.2.1:

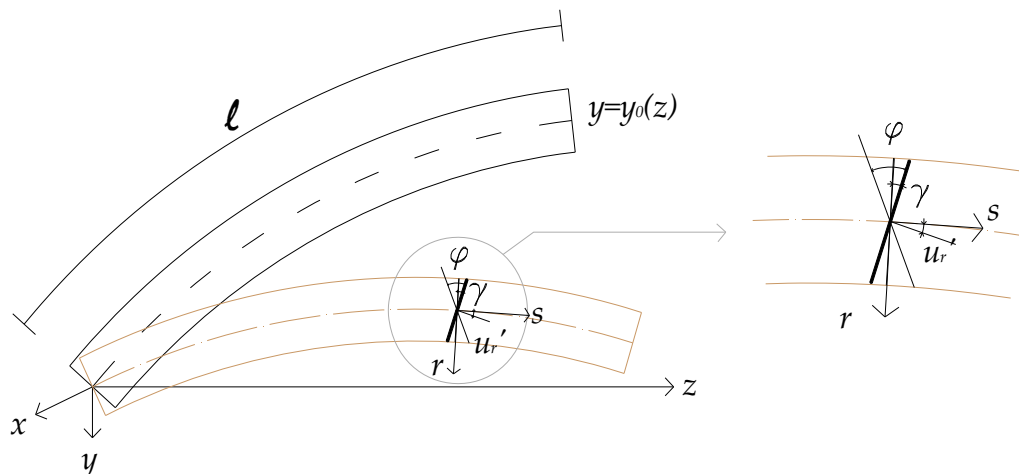


Figura I.4.2.1: Cinematica della trave curvilinea deformabile a taglio.

Si osservi che la linea d'asse della trave è individuata dall'espressione $y_0 = y_0(z)$ nella configurazione di riferimento (indeformata) e dall'equazione $y = y(z)$ nella configurazione deformata. La direzione normale e quella tangente alla linea d'asse sono individuate dai versori r e s rispettivamente; con i simboli r e s si denotino invece le coordinate misurate secondo le direzioni dei suddetti versori; in particolare la coordinata s corrisponde all'ascissa curvilinea. La curvatura della linea d'asse in ogni punto può essere rappresentata come $R=R(s)$.

Si assume che, a livello di sezione, si abbia la stessa cinematica della trave ad asse rettilineo:

$$\begin{cases} s_s(s, r) = u_s(s) + r \cdot \varphi(s) \\ s_r(s, r) = u_r(s), \end{cases} \quad (\text{I.4.2.1})$$

ma con le componenti riferite alle direzioni della terna intrinseca.

Il problema si formula in modo analogo a quello della trave ad asse rettilineo tenendo conto delle condizioni di vincolo alle estremità ($\underline{u} = \bar{\underline{u}}$), dei carichi distribuiti lungo l'asse $\underline{p} = [p_s, p_r, m]^T$ e dei carichi concentrati agli estremi $\underline{f} = [f_s, f_r, M]^T$ (entrambi riferiti alle direzioni della terna intrinseca), delle proprietà

elastiche del materiale (E, ν) , delle caratteristiche geometriche della sezione (A, J, k_T) e della luce ℓ .

Le incognite del problema rimangono le componenti di spostamento $\underline{u} = [u_s, u_r, \varphi]^T$, le componenti generalizzate di deformazione $\underline{d} = [\varepsilon_0, \gamma, \kappa]^T$ e le componenti dell'azione interna $\underline{S} = [N, T, M]^T$. Le equazioni a disposizione sono le 3 equazioni differenziali di equilibrio (I.4.2.1.a), le 3 equazioni differenziali di compatibilità (I.4.1.2.b) e le 3 equazioni algebriche costitutive (I.4.1.2.c):

$$\begin{aligned} a) \quad & \left\{ \begin{aligned} \frac{dN}{ds} - \frac{T}{R} + q_s &= 0; & \frac{dT}{ds} + \frac{N}{R} + q_r &= 0; & \frac{dM}{ds} - T + m &= 0; \end{aligned} \right. \\ b) \quad & \left\{ \begin{aligned} \varepsilon_0 &= \frac{du_s}{ds} - \frac{u_r}{R}; & \gamma &= \frac{du_r}{ds} + \frac{u_s}{R} + \varphi; & \kappa &= \frac{d\varphi}{ds}; \end{aligned} \right. & (I.4.2.2) \\ c) \quad & \left\{ \begin{aligned} N &= EA \cdot \varepsilon_0; & T &= k_T \cdot GA \cdot \gamma; & M &= EJ \cdot \kappa. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Nelle (I.4.2.2) R è il raggio di curvatura puntuale.

In questo caso la risoluzione analitica del sistema (I.4.2.2) non è semplice come per la trave rettilinea in quanto le componenti assiale N e trasversale T dell'azione interna e le componenti di deformazione generalizzate ε_0 e γ risultano accoppiate rispettivamente nelle equazioni di equilibrio (I.4.2.2.a) e nelle equazioni di compatibilità (I.4.2.2.b).

Se si suppone che la deformabilità a taglio si annulli, cioè che $\gamma = 0$, si ottiene che la sezione retta, oltre che piana, si conserva anche ortogonale all'asse deformato della trave (ipotesi di *Eulero-Bernoulli*) e risulta:

$$\gamma = \frac{du_r}{ds} + \frac{u_s}{R} + \varphi = 0 \rightarrow \varphi = -\left(\frac{du_r}{ds} + \frac{u_s}{R} \right), \quad (I.4.2.3)$$

e quindi:

$$\frac{d\varphi}{ds} = -\frac{d^2u_r}{ds^2} - \frac{d}{ds} \left(\frac{u_s}{R} \right) = \frac{d^2u_r}{ds^2} - \frac{1}{R} \cdot \frac{du_s}{ds} + \frac{u_s}{R^2} \cdot \frac{dR}{ds}. \quad (I.4.2.4)$$

L'ultimo termine della (I.4.2.4) si annulla se la trave è a curvatura costante mentre si può trascurare se la trave ha curvatura variabile ma tale che $\left| \frac{dR}{ds} \right|$ sia infinitesimo dello stesso ordine di $|u_s|$.

In ultimo se si ipotizza l'inesistibilità assiale ($\varepsilon_0 = 0$) si ha:

$$\frac{du_s}{ds} = \frac{u_r}{R} \quad (I.4.2.5)$$

Nelle ipotesi fatte le (I.4.2.2) si specializzano come segue:

$$\begin{aligned} a) & \left\{ \begin{aligned} \frac{dN}{ds} - \frac{T}{R} + q_s &= 0; & \frac{dT}{ds} + \frac{N}{R} + q_r &= 0; & \frac{dM}{ds} - T + m &= 0; \end{aligned} \right. \\ b) & \left\{ \begin{aligned} \varepsilon_0 = \frac{du_s}{ds} - \frac{u_r}{R} &= 0; & \gamma = \frac{du_r}{ds} + \frac{u_s}{R} + \varphi &= 0; & \kappa &= -\left(\frac{d^2 u_r}{ds^2} + \frac{u_r}{R^2} \right); \end{aligned} \right. \\ c) & \left\{ M = EJ \cdot \kappa. \right. \end{aligned} \quad (I.4.2.6)$$

Limitandosi a sviluppare soltanto il primo dei due modelli strutturali con il metodo degli elementi finiti è possibile utilizzare come approssimanti per i campi di spostamento polinomi di Lagrange del 2° ordine. La motivazione della scelta di polinomi parabolici è motivata dal fatto che un elemento di trave curva deve avere la geometria descritta da funzioni di forma non lineari e quindi, se si ricorre a polinomi, il grado minimo che si può utilizzare è il 2°.

Di seguito si descrive la modellazione di un elemento finito Lagrangiano isoparametrico a 3 nodi (Figura I.4.2.2).

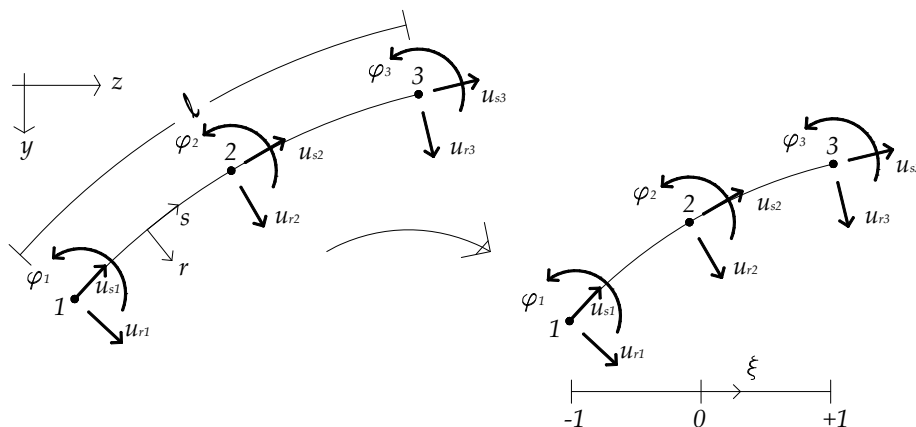


Figura I.4.2.2: Modello agli elementi finiti per travi curve di Timoshenko.

- Modellazione della geometria:

$$\left\{ \begin{aligned} z(\xi) &= \sum_{i=1}^3 La_i(\xi) \cdot z_i \\ y(\xi) &= \sum_{i=1}^3 La_i(\xi) \cdot y_i \end{aligned} \right. \rightarrow \left\{ \begin{aligned} \frac{dz}{d\xi} &= \sum_{i=1}^3 \frac{dLa_i(\xi)}{d\xi} \cdot z_i \\ \frac{dy}{d\xi} &= \sum_{i=1}^3 \frac{dLa_i(\xi)}{d\xi} \cdot y_i \end{aligned} \right. \rightarrow \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 z}{d\xi^2} &= \sum_{i=1}^3 \frac{d^2 La_i(\xi)}{d\xi^2} \cdot z_i \\ \frac{d^2 y}{d\xi^2} &= \sum_{i=1}^3 \frac{d^2 La_i(\xi)}{d\xi^2} \cdot y_i \end{aligned} \right. \quad (I.4.2.7)$$

Da qui con gli algoritmi della geometria differenziale è possibile determinare il determinante Jacobiano della trasformazione e il raggio di curvatura in ogni punto:

$$J = \frac{ds}{d\xi} = \sqrt{\left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2}; \quad R = \frac{\left[\left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left\|\left(\frac{dz}{d\xi}\right) \cdot \left(\frac{d^2y}{d\xi^2}\right) - \left(\frac{dy}{d\xi}\right) \cdot \left(\frac{d^2z}{d\xi^2}\right)\right\|} \quad (\text{I.4.2.8})$$

- Modellazione degli spostamenti e derivazione dei campi di deformazione:

$$\begin{cases} u_s(\xi) = \sum_{i=1}^3 La_i(\xi) \cdot u_{si} \\ u_r(\xi) = \sum_{i=1}^3 La_i(\xi) \cdot u_{ri} \\ \varphi(\xi) = \sum_{i=1}^3 La_i(\xi) \cdot \varphi_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{ss} = \frac{\partial s_s}{\partial s} = \left(\frac{du_s}{ds} - \frac{u_r}{R}\right) + y \frac{d\varphi}{ds} = \varepsilon_0 + y \cdot \kappa \\ \gamma_{sr} = \frac{\partial s_r}{\partial s} + \frac{\partial s_s}{\partial r} = \frac{du_r}{ds} + \varphi = \gamma = \left[\sum_{i=1}^3 \frac{dLa_i(\xi)}{d\xi} \cdot u_{ri}\right] \cdot \frac{d\xi}{ds} + \left[\sum_{i=1}^3 La_i(\xi) \cdot \varphi_i\right] \end{cases} \quad (\text{I.4.2.9})$$

- Discretizzazione del funzionale dell'Energia Potenziale Totale:

$$\begin{aligned} \Pi(u) &= \int_{\beta} \Phi(\varepsilon) dV - L_{ext} = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} (EA \cdot \varepsilon_0^2 + EJ \cdot \kappa^2 + GA_s \cdot \gamma^2) ds - \int_0^{\ell} (q_s \cdot u_s + q_r \cdot u_r + m \cdot \varphi) ds \simeq \\ & \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \left(EA \cdot \left(\sum_{i=1}^3 \frac{dLa_i(\xi)}{d\xi} \cdot u_{si} \cdot \frac{1}{J} - \frac{1}{R} \left(\sum_{i=1}^3 La_i(\xi) \cdot u_{ri} \right) \right)^2 \right) \cdot J \cdot d\xi \\ & + \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \left(EJ \cdot \left(y \cdot \sum_{i=1}^3 \frac{dLa_i(\xi)}{d\xi} \cdot \varphi_i \cdot \frac{1}{J} \right)^2 \right) \cdot J \cdot d\xi \\ & + \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \left(GA_s \cdot \left(\sum_{i=1}^3 \frac{dLa_i(\xi)}{d\xi} \cdot u_{ri} \cdot \frac{1}{J} + \sum_{i=1}^3 La_i(\xi) \cdot \varphi_i \right)^2 \right) \cdot J \cdot d\xi \\ & - \int_{-1}^{+1} \left(q_s \cdot \left(\sum_{i=1}^3 La_i(\xi) \cdot u_{si} \right) + q_r \cdot \left(\sum_{i=1}^3 La_i(\xi) \cdot u_{ri} \right) + m \cdot \left(\sum_{i=1}^3 La_i(\xi) \cdot \varphi_i \right) \right) \cdot J \cdot d\xi. \end{aligned} \quad (\text{I.4.2.10})$$

Nella (I.4.2.10) si è tenuto conto che, per la (I.4.2.8.a) $d\xi/ds = 1/J$.

Ancora una volta, imponendo la condizione di stazionarietà, la matrice di rigidezza dell'elemento si ricava dall'espressione del potenziale elastico, mentre il vettore delle forze nodali si ottiene dal termine relativo al lavoro esterno.

I.4.3. Elemento di lastra-piastra piana (*plate and shell*)

In Figura I.4.3.1 si riporta la cinematica per il modello strutturale di lastra-piastra piana deformabile a taglio.

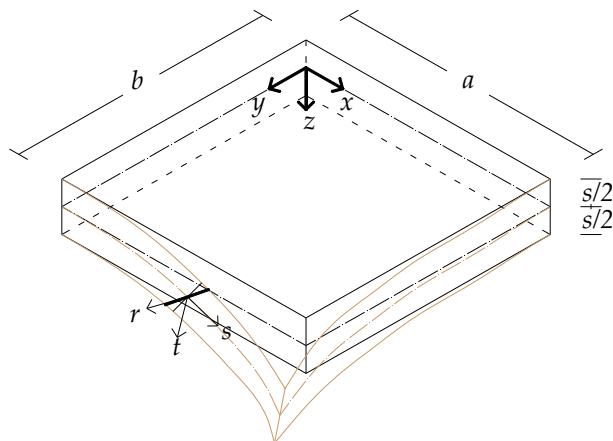


Figura I.4.3.1: Cinematica della lastra-piastra piana di Reissner-Mindlin.

Il modello prende il nome di *piastra di Reissner-Mindlin*, [si veda, tra gli altri, *Corradi; 1992*], e considera contemporaneamente le componenti di deformazione nel piano quelle flessionali e quelle taglianti perpendicolari al piano. Mentre nel caso dei modelli di trave tutte le variabili sono riferite naturalmente alla linea d'asse (a cui si associa una sezione retta), per le piastre ci si riferisce ad un piano medio al quale si associa uno spessore h funzione continua dei punti del piano stesso. Il modello cinematico di piastra piana risulta dalla naturale generalizzazione del caso della trave rettilinea ed è descritto nel modo seguente (Figura I.4.3.2):

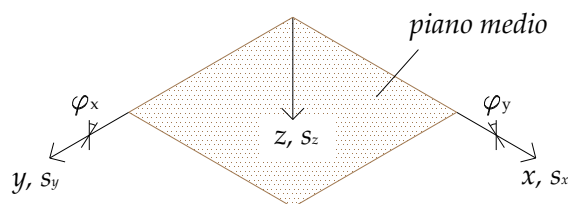


Figura I.4.3.2: Componenti di spostamento nella piastra (piana) di Reissner-Mindlin.

$$\begin{cases} s_x(x, y, z) = u_x(x, y) - z \cdot \varphi_x(x, y) \\ s_y(x, y, z) = u_y(x, y) - z \cdot \varphi_y(x, y) \\ s_z(x, y, z) = u_z(x, y), \end{cases} \quad (\text{I.4.3.1})$$

dove s_x, s_y, s_z rappresentano le tre componenti di spostamento dei punti del solido piastra, u_x, u_y, u_z quelle dei punti del piano medio, mentre φ_x e φ_y sono le rotazioni

nelle direzioni coordinate di segmenti originariamente ortogonali al piano medio.

Dal modello cinematico si ottengono le seguenti componenti di deformazione:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx}(x, y, z) = \frac{\partial u_x}{\partial x} - z \cdot \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} = \varepsilon_{x0} + z \cdot \kappa_x \\ \varepsilon_{yy}(x, y, z) = \frac{\partial u_y}{\partial y} - z \cdot \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} = \varepsilon_{y0} + z \cdot \kappa_y \\ \varepsilon_{zz}(x, y, z) = \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \\ \gamma_{yz}(x, y, z) = \frac{\partial u_z}{\partial y} - \varphi_y = \gamma_{yz0} \\ \gamma_{xz}(x, y, z) = \frac{\partial u_z}{\partial x} - \varphi_x = \gamma_{xz0} \\ \gamma_{xy}(x, y, z) = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} + z \cdot \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) = \gamma_{xy0} + z \cdot \kappa_{xy} \end{array} \right. \quad (\text{I.4.3.2})$$

Si osservi che $\varepsilon_{xx}, \dots, \gamma_{xy}$ sono le componenti di deformazione dei punti del solido piastra e, in virtù delle ipotesi cinematiche (I.4.3.1), risultano esprimibili in funzione delle componenti di deformazione riferite al piano medio, così definite:

$$\left\{ \begin{array}{lll} \varepsilon_{x0} = \frac{\partial u_x}{\partial x}; & \varepsilon_{y0} = \frac{\partial u_y}{\partial y} & \\ \gamma_{yz0} = \frac{\partial u_z}{\partial y} - \varphi_y; & \gamma_{xz0} = \frac{\partial u_z}{\partial x} - \varphi_x; & \gamma_{xy0} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \\ \kappa_x = \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}; & \kappa_y = \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}; & \kappa_{xy} = \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \end{array} \right. \quad (\text{I.4.3.3})$$

Le quantità statiche associate al modello cinematico ed evidenziate nella Figura I.4.3.3 sono definite dalla condizione di equivalenza dei lavori virtuali esterno ed interno per unità di superficie media $dA=dx dy$. Introducendo il vettore delle forze di volume $\underline{B} = [B_x; B_y; B_z]^T$ si ha:

$$\frac{\delta L_e}{dA} = \int_{-h/2}^{+h/2} (\underline{B}^T \cdot \delta \underline{u}) dz = \underline{p}_m^T \cdot \delta \underline{u}_m + \underline{p}_f^T \cdot \delta \underline{u}_f$$

$$\text{dove} \left\{ \begin{array}{ll} \underline{p}_m = \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix} dz = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} & \text{sono azioni membranali} \\ \underline{p}_f = \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{bmatrix} B_z \\ -z \cdot B_x \\ -z \cdot B_y \end{bmatrix} dz = \begin{bmatrix} p_z \\ c_x \\ c_y \end{bmatrix} & \text{sono azioni flessionali} \end{array} \right. \quad (\text{I.4.3.4})$$

Analogamente, introducendo il vettore degli sforzi locali $[\ddagger] \underline{\sigma} = [\sigma_{xx}; \sigma_{yy}; \tau_{yz}; \tau_{xz}; \tau_{xy}]^T$:

$$\frac{\delta L_i}{dA} = \int_{-h/2}^{+h/2} (\underline{\sigma}^T \cdot \delta \underline{\varepsilon}) dz = \underline{Q}_m^T \cdot \delta \underline{\varepsilon}_m + \underline{Q}_f^T \cdot \delta \underline{\varepsilon}_f$$

$$dove \left\{ \begin{array}{l} \underline{Q}_m = \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} \quad \text{sono azioni membranali} \\ \underline{Q}_f = \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{bmatrix} z \cdot \sigma_{xx} \\ z \cdot \sigma_{yy} \\ z \cdot \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} dz = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ T_x \\ T_y \end{bmatrix} \quad \text{sono azioni flessionali} \end{array} \right. \quad (I.4.3.5)$$

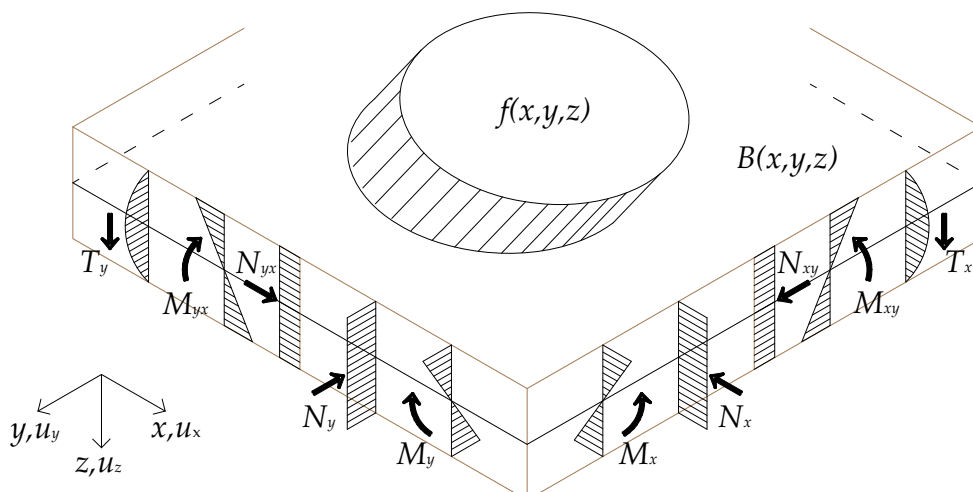


Figura I.4.3.3: Forze di superficie e di volume e sforzi generalizzati.

Le condizioni di equilibrio vengono ricavate dall'equazione dei lavori virtuali per tutte le variazioni di configurazione consentite dai vincoli e dalle condizioni di compatibilità del modello cinematico. Le equazioni di equilibrio saranno espresse in funzione delle variabili generalizzate finora introdotte.

In queste ipotesi il lavoro interno è dato da:

$$L_i = \int_A \left(\int_{-h/2}^{+h/2} (\underline{\sigma}^T \cdot \delta \underline{\varepsilon}) dz \right) dx \cdot dy = \int_A (\underline{Q}_m^T \cdot \delta \underline{\varepsilon}_m + \underline{Q}_f^T \cdot \delta \underline{\varepsilon}_f) dx \cdot dy. \quad (I.4.3.6)$$

‡ Si noti che la componente di sforzo normale agente nello spessore della piastra, σ_{zz} non viene presa in considerazione poiché, per l'ipotesi di comportamento a piastra compie lavoro nullo per la corrispondente deformazione ε_{zz} . Si ha così per il vettore delle componenti di deformazione: $\underline{\varepsilon} = [\varepsilon_{xx}; \varepsilon_{yy}; \gamma_{yz}; \gamma_{xz}; \gamma_{xy}]^T$.

Mentre il lavoro esterno vale:

$$L_e = \int_A \left(\int_{-h/2}^{+h/2} (\underline{B}^T \cdot \delta \underline{u}) dz \right) dx \cdot dy = \int_A \left(\underline{p}_m^T \cdot \delta \underline{u}_m + \underline{p}_f^T \cdot \delta \underline{u}_f \right) dx \cdot dy, \quad (\text{I.4.3.7})$$

a cui si devono sommare i contributi dei carichi esterni applicati sulla superficie di contorno.

L'espressione dell'equazione dei lavori virtuali evidenzia che il problema membranale e quello flessionale sono disaccoppiati e pertanto saranno trattati separatamente.

1) Problema membranale: Al fine di introdurre nell'espressione dei lavori virtuali anche la componente dovuta ai carichi di superficie si distingue la porzione caricata $\partial\beta_f$ di superficie esterna della lastra sulla quale agiscono solo forze nel piano. In queste ipotesi si ha:

$$\underline{f}_m = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} dz \quad (\text{I.4.3.8})$$

Dove t_x e t_y sono le trazioni superficiali su $\partial\beta_f$. Sulla restante parte $\partial\beta_u$ del contorno invece si assegnano gli spostamenti.

Quindi l'espressione dei lavori virtuali esterno ed interno diventano:

$$\begin{aligned} L_e &= \int_A (p_x \cdot \delta u_x + p_y \cdot \delta u_y) dx \cdot dy + \int_{\partial\beta_f} (f_x \cdot \delta u_x + f_y \cdot \delta u_y) ds \\ L_i &= \int_A (N_x \cdot \delta \varepsilon_{x0} + N_y \cdot \delta \varepsilon_{y0} + N_{xy} \cdot \delta \gamma_{xy0}) dx \cdot dy \end{aligned} \quad (\text{I.4.3.9})$$

Sostituendo le condizioni di compatibilità del modello cinematico nel lavoro virtuale interno si ha:

$$\begin{aligned} L_i &= \int_A \left(N_x \cdot \left(\frac{\partial \delta u_x}{\partial x} \right) + N_y \cdot \left(\frac{\partial \delta u_y}{\partial x} \right) + N_{xy} \cdot \left(\frac{\partial \delta u_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta u_y}{\partial x} \right) \right) dx \cdot dy \\ &= \int_A \left(\frac{\partial}{\partial x} (N_x \delta u_x + N_{xy} \delta u_y) + \frac{\partial}{\partial y} (N_y \delta u_y + N_{xy} \delta u_x) \right) dx \cdot dy \\ &\quad - \int_A \left(\left(\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \right) \cdot \delta u_x + \left(\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \right) \cdot \delta u_y \right) dx \cdot dy \end{aligned} \quad (\text{I.4.3.10})$$

e quindi, grazie al teorema della divergenza:

$$\begin{aligned}
 L_i &= \int_{\partial A} \left((N_x \cdot n_x + N_{xy} \cdot n_y) \cdot \delta u_x + (N_y \cdot n_y + N_{xy} \cdot n_x) \cdot \delta u_y \right) ds \\
 &\quad - \int_A \left(\left(\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \right) \cdot \delta u_x + \left(\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \right) \cdot \delta u_y \right) dx \cdot dy.
 \end{aligned} \tag{I.4.3.11}$$

Nella (I.4.3.11) $\underline{n} = [n_x; n_y]^T$ rappresenta il vettore normale uscente dal perimetro $\partial\beta$ del piano medio della lastra. Imponendo quindi l'eguaglianza dei lavori virtuali interno ed esterno si ottengono le condizioni di equilibrio per il problema membranale:

$$\begin{cases} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + p_x = 0 \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + p_y = 0 \end{cases} \quad \text{equazioni indefinite di equilibrio} \tag{I.4.3.12}$$

$$\begin{cases} N_x \cdot n_x + N_{xy} \cdot n_y - f_x = 0 \\ N_y \cdot n_y + N_{xy} \cdot n_x - f_y = 0 \end{cases} \quad \text{equazioni di equilibrio sul contorno (libero)}$$

2) Problema flessionale: Analogamente al caso della lastra si deve introdurre nell'espressione dei lavori virtuali anche la componente dovuta ai carichi di superficie. In questo caso però le trazioni superficiali sono rappresentate dalle componenti f_s, f_n e f_z rispettivamente nelle direzioni tangenziale, normale e trasversale al perimetro del piano medio che danno luogo a momenti torcenti W_{sn} , momenti flettenti (normali al bordo) W_n e forze trasversali V espressi dalle seguenti relazioni:

$$W_{sn} = \int_{-h/2}^{+h/2} z \cdot f_s dz; \quad W_n = \int_{-h/2}^{+h/2} z \cdot f_n dz; \quad V = \int_{-h/2}^{+h/2} f_z dz. \tag{I.4.3.13}$$

Indicando con φ_s e φ_n le rotazioni secondo la direzione rispettivamente tangente e normale al contorno $\partial\beta_f$ i lavori virtuali esterno ed interno diventano:

$$\begin{aligned}
 L_e &= \int_A \left(p_z \cdot \delta u_z + m_x \cdot \delta\varphi_x + m_y \cdot \delta\varphi_y \right) dx \cdot dy + \int_{\partial\beta_f} \left(V \cdot \delta u_z + W_n \cdot \delta\varphi_n + W_{sn} \cdot \delta\varphi_s \right) ds \\
 L_i &= \int_A \left(M_x \cdot \delta\kappa_x + M_y \cdot \delta\kappa_y + M_{xy} \cdot \delta\kappa_{xy} + T_x \cdot \delta\gamma_{xz0} + T_y \cdot \delta\gamma_{yz0} \right) dx \cdot dy.
 \end{aligned} \tag{I.4.3.14}$$

Sostituendo le condizioni di compatibilità del modello cinematico nel lavoro virtuale interno si ha:

$$\begin{aligned}
L_i &= \int_A \left[-M_x \cdot \left(\frac{\partial \delta \varphi_x}{\partial x} \right) - M_y \cdot \left(\frac{\partial \delta \varphi_y}{\partial y} \right) - M_{xy} \cdot \left(\frac{\partial \delta \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \varphi_y}{\partial x} \right) \right. \\
&\quad \left. + T_x \cdot \left(\frac{\partial \delta u_z}{\partial x} - \delta \varphi_x \right) + T_y \cdot \left(\frac{\partial \delta u_z}{\partial y} - \delta \varphi_y \right) \right] dx \cdot dy \\
&= - \int_A \left(\frac{\partial}{\partial x} (M_x \delta \varphi_x + M_{xy} \delta \varphi_y - T_x \delta u_z) + \frac{\partial}{\partial y} (M_y \delta \varphi_y + M_{xy} \delta \varphi_x - T_y \delta u_z) \right) dx \cdot dy \\
&\quad - \int_A \left(\left(T_x - \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) \cdot \delta \varphi_x + \left(T_y - \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) \cdot \delta \varphi_y + \left(\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} \right) \cdot \delta u_z \right) dx \cdot dy
\end{aligned} \tag{I.4.3.15}$$

e quindi, grazie al teorema della divergenza, si ottiene:

$$\begin{aligned}
L_i &= \int_A \left(- \left(\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} \right) \cdot \delta u_z + \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - T_x \right) \cdot \delta \varphi_x + \left(\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - T_y \right) \cdot \delta \varphi_y \right) dx \cdot dy \\
&\quad - \int_{\partial A} \left((M_x \delta \varphi_x + M_{xy} \delta \varphi_y - T_x \delta w) \cdot n_x + (M_y \delta \varphi_y + M_{xy} \delta \varphi_x - T_y \delta w) \cdot n_y \right) ds.
\end{aligned} \tag{I.4.3.16}$$

Analogamente al problema membranale le condizioni di equilibrio indefinite e al contorno si ottengono imponendo l'uguaglianza dei lavori virtuali. Tuttavia, a differenza del caso membranale, mentre le equazioni indefinite di equilibrio (I.4.3.17.a) si ricavano agevolmente quelle al contorno necessitano di ulteriori elaborazioni e portano alle (I.4.3.17.b):

$$\begin{cases} -\frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + T_x + m_x = 0 \\ -\frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + T_y + m_y = 0 \\ \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + p_z = 0 \end{cases} \quad \text{equazioni indefinite di equilibrio} \tag{I.4.3.17}$$

Le condizioni al contorno si traducono quindi nelle seguenti alternative le une di congruenza le altre di equilibrio:

$$\begin{aligned}
u_z = \bar{u}_z &\quad \text{oppure} & T_n = V \\
\varphi_n = \bar{\varphi}_n &\quad \text{oppure} & M_n = -W_n \\
\varphi_{sn} = \bar{\varphi}_{sn} &\quad \text{oppure} & M_{sn} = -W_{sn},
\end{aligned} \tag{I.4.3.18}$$

dove si è posto per brevità:

$$\begin{cases} T_n = T_x \cdot n_x + T_y \cdot n_y \\ M_n = M_x \cdot n_x^2 + 2M_{xy} \cdot n_x \cdot n_y + M_y \cdot n_y^2 \\ M_{sn} = (M_y - M_x) \cdot n_x \cdot n_y + M_{xy} \cdot (n_x^2 - n_y^2). \end{cases} \quad (\text{I.4.3.19})$$

Come mostrato la trattazione di Reissner-Mindlin consente di considerare anche gli effetti della deformabilità tagliante nelle piastre purché si resti nei limiti di validità dell'ipotesi della conservazione delle sezioni piane (FSDT). Il modello è dunque applicabile a piastre moderatamente spesse.

Se, al contrario, la piastra diventa molto sottile, oltre alla conservazione delle sezioni piane, è possibile considerare anche l'ipotesi che il generico segmento ortogonale al piano medio in configurazione indeformata rimanga tale anche in seguito alla deformazione: si ricade quindi nelle ipotesi di *Kirchhoff-Love*. Quest'ultimo modello è puramente flessionale e trascura le deformazioni taglianti con conseguenti notevoli semplificazioni.

Nello specifico nel modello cinematico (I.4.3.2) le deformazioni taglianti γ_{xz} e γ_{yz} sono nulle e quindi i campi di rotazione φ_x e φ_y si ricavano da quello di spostamento trasversale u_z :

$$\varphi_x = \frac{\partial u_z}{\partial x}; \quad \varphi_y = \frac{\partial u_z}{\partial y}. \quad (\text{I.4.3.20})$$

Analogamente per le curvature si ha:

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}; \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}; \quad \kappa_{xy} = -2\frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y}. \quad (\text{I.4.3.21})$$

Il problema membranale non cambia; per quello flessionale invece sforzi e forze generalizzate si riducono a:

$$\begin{aligned} \underline{Q}_f &= \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{bmatrix} z \cdot \sigma_{xx} \\ z \cdot \sigma_{yy} \\ z \cdot \tau_{xy} \end{bmatrix} dz = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} \\ \underline{p}_f &= \int_{-h/2}^{+h/2} B_z dz = p_z \end{aligned} \quad (\text{I.4.3.22})$$

dove, coerentemente con la trattazione della trave di Eulero-Bernoulli, si sono considerate nulle le coppie distribuite c_x e c_y . In base alle ipotesi (I.4.3.20) e (I.4.3.21) l'espressione del lavoro virtuale interno diventa:

$$\begin{aligned} L_i &= \int_A (M_x \cdot \delta\kappa_x + M_y \cdot \delta\kappa_y + M_{xy} \cdot \delta\kappa_{xy}) dx \cdot dy \\ &= \int_A \left[M_x \cdot \left(\frac{\partial^2 \delta u_z}{\partial x^2} \right) + M_y \cdot \left(\frac{\partial^2 \delta u_z}{\partial y^2} \right) + 2M_{xy} \cdot \left(\frac{\partial^2 \delta u_z}{\partial x \partial y} \right) \right] dx \cdot dy, \end{aligned} \quad (I.4.3.23)$$

mentre il lavoro virtuale esterno è:

$$L_e = \int_A (p_z \cdot \delta u_z) dx \cdot dy + \int_{\partial\beta_f} \left(V \cdot \delta u_z + W_n \cdot \frac{\partial \delta u_z}{\partial n} + W_{sn} \cdot \frac{\partial \delta u_z}{\partial s} \right) ds. \quad (I.4.3.24)$$

Procedendo analogamente al caso precedente della piastra di Reissner-Mindlin si ha:

$$\begin{aligned} L_i &= \int_A \delta u_z \cdot \left[\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} \right] dx \cdot dy \\ &+ \int_A \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\delta u_z \cdot \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\delta u_z \cdot \left(\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) \right) \right) dx \cdot dy \\ &- \int_A \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(M_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + M_{xy} \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(M_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + M_{xy} \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right) dx \cdot dy. \end{aligned} \quad (I.4.3.25)$$

Applicando il teorema della divergenza si trova quindi:

$$\begin{aligned} L_i &= \int_A \delta u_z \cdot \left[\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} \right] dx \cdot dy \\ &+ \int_{\partial A} \left(\left(\delta u_z \cdot \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) \right) \cdot n_x + \left(\delta u_z \cdot \left(\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) \right) \cdot n_y \right) ds \\ &- \int_{\partial A} \left(\left(M_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + M_{xy} \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \cdot n_x + \left(M_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + M_{xy} \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \cdot n_y \right) ds, \end{aligned} \quad (I.4.3.26)$$

di qui, ricordando che $\frac{\partial u_z}{\partial x} = \frac{\partial u_z}{\partial n} \cdot n_x + \frac{\partial u_z}{\partial s} \cdot n_y$ e $\frac{\partial u_z}{\partial y} = \frac{\partial u_z}{\partial n} \cdot n_y + \frac{\partial u_z}{\partial s} \cdot n_x$ e ponendo:

$$T_n = \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) \cdot n_x + \left(\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) \cdot n_y \quad (I.4.3.27)$$

si ottiene:

$$L_i = \int_A \delta u_z \cdot \left[\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} \right] dx \cdot dy + \int_{\partial A} \left(T_n \delta u_z - M_n \frac{\partial \delta u_z}{\partial n} - M_{sn} \frac{\partial \delta u_z}{\partial s} \right) ds. \quad (I.4.3.28)$$

Imponendo ora l'uguaglianza tra lavoro virtuale esterno (I.4.3.24) ed interno (I.4.3.28) si esprime la condizione di equilibrio:

$$\int_A \delta u_z \cdot \left[\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + p_z \right] dx \cdot dy + \int_{\partial A} [(V - T_n) \delta u_z] ds + \int_{\partial A} [(W_{sn} + M_{sn}) \frac{\partial \delta u_z}{\partial s}] ds + \int_{\partial A} [(W_n + M_n) \frac{\partial \delta u_z}{\partial n}] ds = 0 \quad (\text{I.4.3.29})$$

dal primo integrale si ottiene l'equazione indefinita di equilibrio (I.4.3.30.a) mentre dall'ultimo un'alternativa al contorno (I.4.3.30.b):

$$\begin{aligned} a) & \left\{ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + p_z = 0 \quad \text{in } A \right. \\ b) & \left. \left\{ \frac{\partial u_z}{\partial n} = -\bar{\varphi}_n \quad \text{oppure} \quad M_n = -W_n \quad \text{su } \partial A; \right. \right. \end{aligned} \quad (\text{I.4.3.30})$$

dai due integrali restanti ci si riconduce alla seguente condizione:

$$\int_{\partial A} \left[\left(V - T_n - \frac{\partial W_{sn}}{\partial s} - \frac{\partial M_{sn}}{\partial s} \right) \delta u_z \right] ds = 0 \quad (\text{I.4.3.31})$$

che comporta un'ulteriore alternativa al contorno:

$$u_z = \bar{u}_z \quad \text{oppure} \quad T_n + \frac{\partial M_{sn}}{\partial s} = V - \frac{\partial W_{sn}}{\partial s} \quad \text{su } \partial A. \quad (\text{I.4.3.32})$$

L'interpretazione meccanica della (1.4.3.32) è rappresentata in Figura 1.4.3.4.

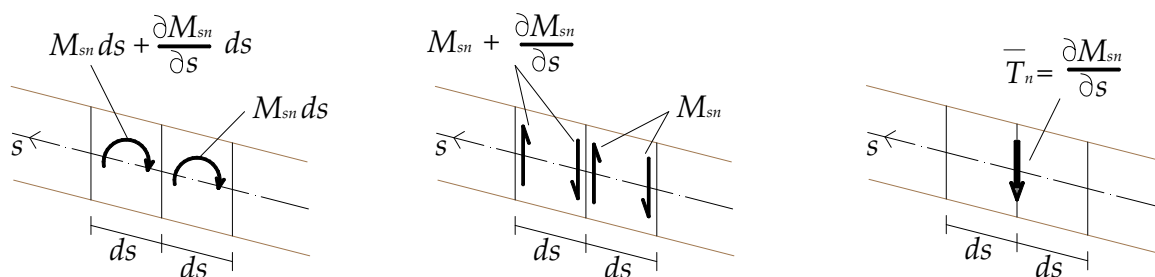


Figura I.4.3.4: Interpretazione meccanica della 1.4.3.32. Riduzione delle coppie distribuite.

La quantità nota come *taglio di Kirchhoff*:

$$T_n^K = T_n + \bar{T}_n = T_n + \frac{\partial M_{sn}}{\partial s} \quad (\text{I.4.3.33})$$

si configura come una misura globale di azione trasversale interna e comprende un contributo staticamente equivalente al momento torcente.

Si passa ora a sviluppare, con riferimento al modello di Reissner-Mindlin, un elemento finito a 4 nodi in cui i campi di spostamento sono approssimati tramite

polinomi di Lagrange bilineari [‡]. Si riporta di seguito la procedura per la modellazione di un elemento finito Lagrangiano isoparametrico di lastra-piastra (*plate and shell*) (Figura I.4.3.5) a 4 nodi.

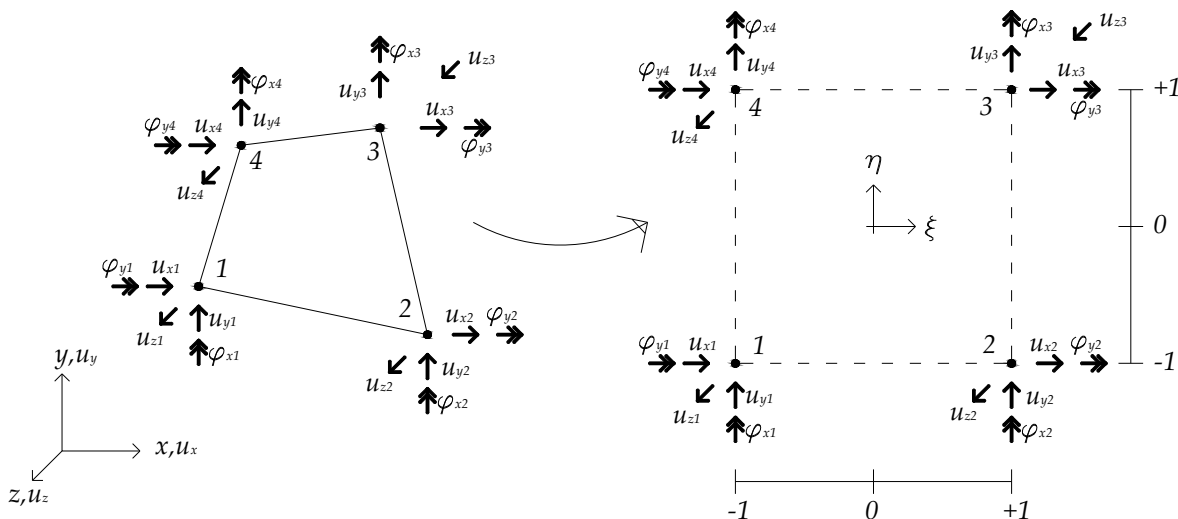


Figura I.4.3.5: Modello agli elementi finiti per piastre di Reissner-Mindlin.

- Modellazione della geometria:

$$\begin{cases}
 x(\xi, \eta) = \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} \cdot x_1 + \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} \cdot x_2 + \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} \cdot x_3 + \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} \cdot x_4 = \sum_{i=1}^2 La_i(\xi, \eta) \cdot x_i \\
 y(\xi, \eta) = \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} \cdot y_1 + \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} \cdot y_2 + \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} \cdot y_3 + \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} \cdot y_4 = \sum_{i=1}^2 La_i(\xi, \eta) \cdot y_i
 \end{cases}$$

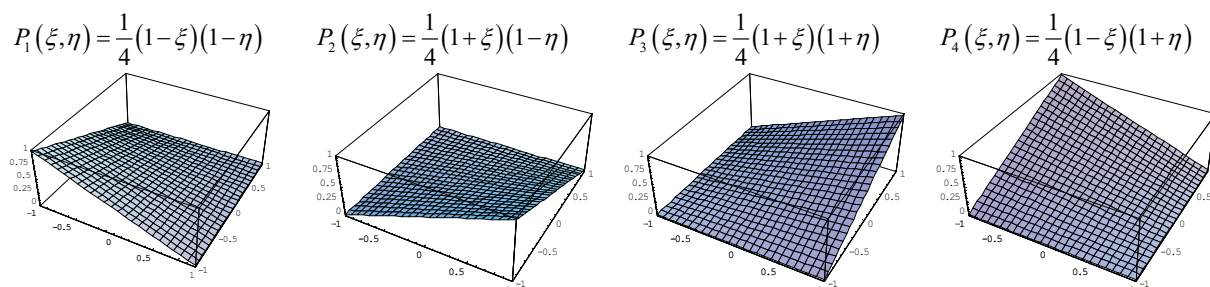
$$\rightarrow \begin{cases}
 \frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial La_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot x_i; & \frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial La_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot x_i; \\
 \frac{\partial y}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial La_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot y_i; & \frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial La_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot y_i.
 \end{cases} \tag{I.4.3.34}$$

‡ Polinomi di Lagrange in due variabili

Sempre nell'ambito della definizione data in precedenza, i polinomi di Lagrange per elementi rettangolari cui nodi si collocano ad intervalli regolari su una maglia $r \times s$ si scrivono come:

$$P_j(\xi, \eta) = N_h^r(\xi) \cdot N_k^s(\eta) \quad h=1 \dots r; \quad k=1 \dots s;$$

Il caso più semplice è quello con $s = r = 2$ e con una maglia quadrata di lato 2 [sicché i vertici hanno coordinate rispettivamente pari a $(-1, -1)$; $(+1, -1)$; $(+1, +1)$; $(-1, +1)$], per i quali si ottengono i seguenti polinomi bilineari:



Dalla (I.4.3.34) è possibile determinare lo Jacobiano della trasformazione:

$$J = \det \begin{bmatrix} \partial x / \partial \xi & \partial y / \partial \xi \\ \partial x / \partial \eta & \partial y / \partial \eta \end{bmatrix} \quad (\text{I.4.3.35})$$

- Modellazione degli spostamenti e derivazione dei campi di deformazione:

$$\begin{cases} u_x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^2 La_i(\xi, \eta) \cdot u_{xi} \\ u_y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^2 La_i(\xi, \eta) \cdot u_{yi} \\ u_z(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^2 La_i(\xi, \eta) \cdot u_{zi} \\ \varphi_x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^2 La_i(\xi, \mu) \cdot \varphi_{xi} \\ \varphi_y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^2 La_i(\xi, \mu) \cdot \varphi_{yi} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \varepsilon_{x0} = \frac{\partial u_x}{\partial x}; & \varepsilon_{y0} = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \\ \gamma_{xy0} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}; & \gamma_{zy0} = \frac{\partial u_z}{\partial y} + \varphi_y; & \gamma_{zx0} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \varphi_x \\ \kappa_x = \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}; & \kappa_y = \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}; & \kappa_{xy} = \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}. \end{cases} \quad (\text{I.4.3.36})$$

- Discretizzazione del funzionale dell'Energia Potenziale Totale:

$$\begin{aligned} \Pi(u) &= \int_{\beta} \Phi(\varepsilon) dV - L_{ext} \\ &= \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-h/2}^{h/2} \left(E \cdot \varepsilon_{xx}^2 + E \cdot \varepsilon_{yy}^2 + E \cdot (z \cdot \kappa_{xx})^2 + E \cdot (z \cdot \kappa_{yy})^2 + E \cdot (z \cdot \kappa_{xy})^2 + G \cdot \gamma_{xy}^2 + G \cdot \gamma_{zy}^2 + G \cdot \gamma_{zx}^2 \right) dV \\ &\quad - \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-h/2}^{h/2} \left(q_x \cdot u_x + q_y \cdot u_y + q_z \cdot u_z + m_{\varphi_x} \cdot \varphi_x + m_{\varphi_y} \cdot \varphi_y \right) dV \simeq \\ &\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-h/2}^{h/2} \left[E \cdot \left(\sum_{i=1}^4 \frac{\partial La_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot u_{xi} \cdot \frac{1}{J} \right)^2 \right] \cdot J \cdot dz \cdot d\xi \cdot d\eta + \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-h/2}^{h/2} \left[E \cdot \left(\sum_{i=1}^4 \frac{\partial La_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot u_{yi} \cdot \frac{1}{J} \right)^2 \right] \cdot J \cdot dz \cdot d\xi \cdot d\eta \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-h/2}^{h/2} \left[E \cdot \left(z \cdot \sum_{i=1}^4 \frac{\partial La_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \varphi_{xi} \cdot \frac{1}{J} \right)^2 \right] \cdot J \cdot dz \cdot d\xi \cdot d\eta + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-h/2}^{h/2} \left[E \cdot \left(z \cdot \sum_{i=1}^4 \frac{\partial La_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \varphi_{yi} \cdot \frac{1}{J} \right)^2 \right] \cdot J \cdot dz \cdot d\xi \cdot d\eta + \\ &\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-h/2}^{h/2} \left[E \cdot \left(z \cdot \sum_{i=1}^4 \frac{\partial La_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot \varphi_{xi} \cdot \frac{1}{J} + z \cdot \sum_{i=1}^4 \frac{\partial La_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \varphi_{yi} \cdot \frac{1}{J} \right)^2 \right] \cdot J \cdot dz \cdot d\xi \cdot d\eta + \\ &\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-h/2}^{h/2} \left[G \cdot k_T \cdot \left(\sum_{i=1}^4 \frac{\partial La_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot u_{xi} \cdot \frac{1}{J} + \sum_{i=1}^4 \frac{\partial La_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot u_{yi} \cdot \frac{1}{J} \right)^2 \right] \cdot J \cdot dz \cdot d\xi \cdot d\eta + \\ &\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-h/2}^{h/2} \left[G \cdot k_T \cdot \left(\sum_{i=1}^4 \frac{\partial La_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot u_{zi} \cdot \frac{1}{J} + \sum_{i=1}^4 \frac{\partial La_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \varphi_{yi} \right)^2 \right] \cdot J \cdot dz \cdot d\xi \cdot d\eta + \\ &\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-h/2}^{h/2} \left[G \cdot k_T \cdot \left(\sum_{i=1}^4 \frac{\partial La_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot u_{zi} \cdot \frac{1}{J} + \sum_{i=1}^4 \frac{\partial La_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot \varphi_{xi} \right)^2 \right] \cdot J \cdot dz \cdot d\xi \cdot d\eta - \\ &\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-h/2}^{h/2} \left(q_x \cdot \left(\sum_{i=1}^4 La_i(\xi, \eta) \cdot u_{xi} \right) + q_y \cdot \left(\sum_{i=1}^4 La_i(\xi, \eta) \cdot u_{yi} \right) + q_z \cdot \left(\sum_{i=1}^4 La_i(\xi, \eta) \cdot u_{zi} \right) \right) \cdot J \cdot dz \cdot d\xi \cdot d\eta - \\ &\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-h/2}^{h/2} \left(m_{\varphi_x} \cdot \left(\sum_{i=1}^4 La_i(\xi, \eta) \cdot \varphi_{xi} \right) + m_{\varphi_y} \cdot \left(\sum_{i=1}^4 La_i(\xi, \eta) \cdot \varphi_{yi} \right) \right) \cdot J \cdot dz \cdot d\xi \cdot d\eta \end{aligned} \quad (\text{I.4.3.37})$$

Procedendo in maniera usuale, si impone la stazionarietà, e si ricavano dal potenziale elastico la matrice di rigidezza dell'elemento e dal lavoro esterno il vettore delle forze nodali.

I.4.4. Limitazioni d'uso degli elementi finiti agli spostamenti

I casi sopra riportati costituiscono elementi finiti di trave e di piastra e rispecchiano modelli strutturali ben definiti. Come si è detto è stata considerata la *FSDT* (*First-order Shear Deformation Theory*) per descrivere la cinematica della sezione retta, che si ipotizza piana anche in seguito alla deformazione. Quest'ipotesi consente di studiare casi di travi e piastre moderatamente spesse comprendendo anche gli effetti della deformabilità tagliante.

Proprio questo aspetto è classicamente modellato nei *FEM* tramite l'ipotesi che i campi di spostamento siano tra loro indipendenti (come negli esempi di trave di Timoshenko e piastra di Reissner-Mindlin) e costituisce fonte di errore nel caso in cui travi rettilinee o piastre piane passino da moderatamente spesse a sottili. Questo effetto, che produce un irrigidimento del modello, è chiamato *shear-locking* al quale se ne aggiunge un secondo, che presenta i medesimi sintomi, nel caso di elementi curvi il *membrane-locking*.

Per meglio comprendere questi fenomeni si riporta un semplice esempio [tratto da Brezzi, 2007].

Dati due valori $\mu > 0$ e $\lambda > 0$ si vuole minimizzare, in \mathbb{R}^2 , la seguente funzione:

$$f(x, y) = \mu(x - 7)^2 + \lambda y^2 \quad (\text{I.4.4.1})$$

Supponendo che $\mu = \lambda = 1$ il minimo della funzione f (corrispondente al punto di coordinate $x=7; y=0$) viene evidenziato in Figura I.4.4.1 con un puntino rosso.

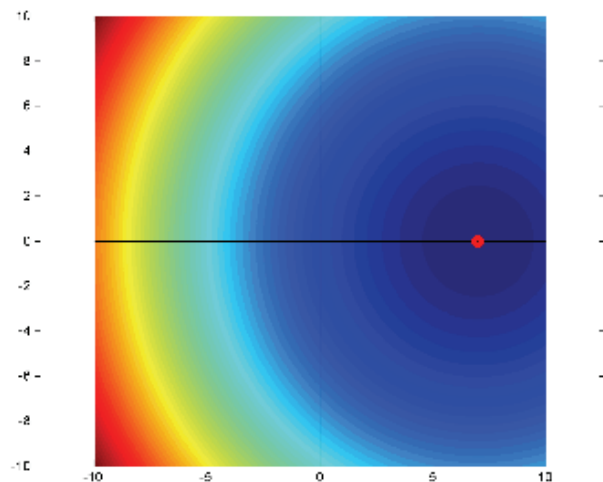


Figura I.4.4.1: curve di livello della funzione $f(x, y)$ definita dalla (I.4.4.1).

La Figura I.4.4.1 si riferisce alla soluzione esatta (non approssimata) del problema che si vuole risolvere.

Passando al problema approssimato ovvero restringendo il campo di ricerca della soluzione ad un sottospazio di \mathbb{R}^2 , ad esempio quello individuato dalla condizione $y = -x/10$, si ottiene (Figura I.4.4.2):

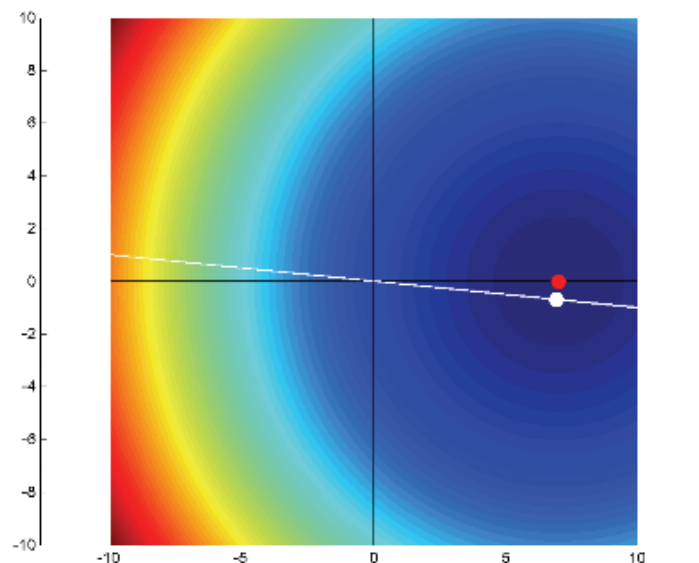


Figura I.4.4.2: Soluzione approssimata del problema di minimo (I.4.4.1).

Si nota che la soluzione del problema discretizzato (il puntino bianco) non coincide con la soluzione esatta (il puntino rosso) ma ne costituisce un'ottima approssimazione. Se però si varia il valore di λ si nota che la soluzione approssimata cessa di convergere alla soluzione esatta (Figura I.4.4.3):

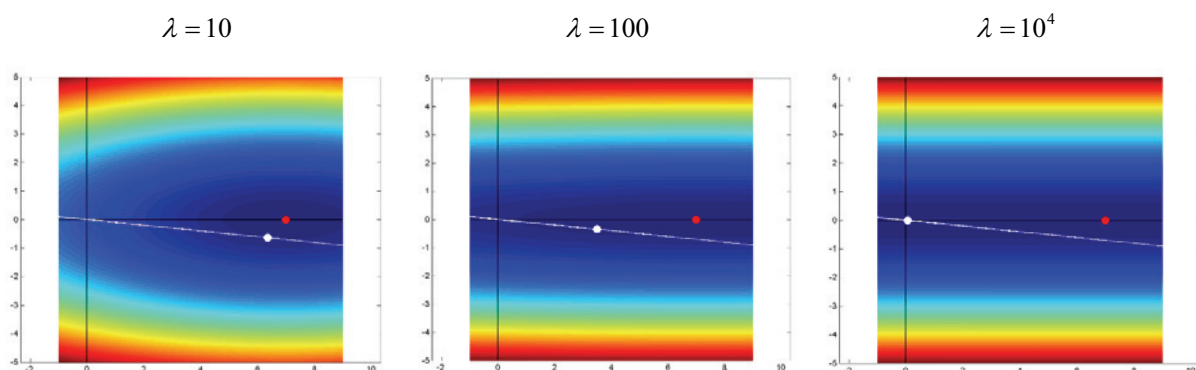


Figura I.4.4.3: Confronto tra soluzione esatta e soluzione approssimata al variare di λ per il problema di minimo (I.4.4.1).

In Figura I.4.4.3 si osserva che per λ crescente la soluzione approssimata tende al valore $x=0, y=0$, ovvero si ha un effetto di irrigidimento artificiale: in ciò consiste il fenomeno del *locking*.

Come secondo esempio si considera il modello strutturale della trave deformabile a flessione e taglio; l'energia di deformazione elastica in questo caso si scrive:

$$\Phi(\kappa, \gamma) = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} (EJ\kappa^2 + GA_s\gamma^2) dz, \quad (\text{I.4.4.2})$$

dove si deve tenere conto delle relazioni cinematiche:

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} & (a) \\ \gamma &= \frac{\partial v_0(z)}{\partial z} + \varphi(z) = L(v). & (b) \end{aligned} \quad (\text{I.4.4.3})$$

Se si divide l'espressione del potenziale elastico per EJ , quantità certamente positiva (e non nulla), e si tiene conto della definizione di γ il potenziale elastico può essere riscritto nella forma:

$$\Phi(v_0, \gamma) = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \left(\left(\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \right)^2 + \psi \left(\frac{\partial v_0(z)}{\partial z} + \varphi(z) \right)^2 \right) dz, \quad (\text{I.4.4.4})$$

dove si è indicato con ψ il rapporto tra rigidezza a taglio e rigidezza flessionale. Si nota che il termine ψ per travi molto sottili tende a divergere: infatti, se si opera per semplicità con una sezione rettangolare di base b e altezza s si ha con qualche semplificazione:

$$\psi = \frac{GA_s}{EJ} = \frac{1}{s^2} \frac{12}{2k_T(1+\nu)}, \quad (\text{I.4.4.5})$$

in cui, ν è il coefficiente di Poisson e k_T è il fattore di riduzione dell'area di taglio.

Si nota che:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \psi = +\infty$$

L'espressione (I.4.4.3.b) che definisce lo scorrimento γ può essere scritta mediante l'operatore differenziale lineare $L(v)$ che rappresenta il vincolo di compatibilità tra spostamenti e deformazioni.

L'energia potenziale totale che caratterizza il problema prototipo assume quindi la forma seguente:

$$\Pi(v) = \Phi(v) - L_{\text{ext}}(v) = \frac{1}{2} \int_0^\ell \left(\left(\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \right)^2 + \psi(L(v))^2 \right) dz - \int_0^\ell (q_w w + q_v v + m\varphi) dz \quad (\text{I.4.4.6})$$

Affinché il potenziale elastico sia finito gli elementi v dello spazio funzionale devono essere funzioni continue sul dominio $[0, \ell]$ con derivate prime di quadrato sommabile nel senso di Lebesgue ($v \in C^0 \times C^0$ in $[0, \ell]$; $v' \in L^2 \times L^2$ in $[0, \ell]$) e devono soddisfare condizioni omogenee al bordo che verranno indicate semplicemente con $v \in V$.

Dal momento che lo scorrimento $\gamma = L(v)$ deve essere semplicemente di quadrato sommabile ($\gamma \in L^2[0, \ell]$) si può scrivere che, per un assegnato γ , sono definiti gli spazi:

$$\begin{cases} K(\gamma) = \{v \mid v \in V, L(v) = \gamma\} \\ \hat{D} = \{\gamma \mid \gamma \in L(v), \text{ per } v \in V\} \end{cases} \quad (\text{I.4.4.7})$$

Con riferimento a casi più generali [si vedano *Brezzi, Fortin, 1991; Bathe, 1996*] si introduce la forma quadratica $a(v, v)$ per il potenziale elastico e dunque l'E.P.T. può essere scritta nella forma generale:

$$\Pi(v) = \frac{1}{2} a(v, v) + \frac{\psi}{2} \int_{\beta_e} (L(v))^2 dV - L_{\text{ext}}(v) \quad (\text{I.4.4.8})$$

dove $a(v, v) = \frac{1}{2} \int_0^\ell (v')^2 dz$ è un funzionale quadratico definito positivo ovvero:

$$a(v, v) > 0 \quad \forall v \neq 0 \in V \quad (\text{I.4.4.9})$$

nullo cioè solo in corrispondenza dei moti rigidi e unico in soluzione, come dimostrato dal teorema di *Kirchhoff* [si vedano *Gambarotta e al., 2003; Babuška, Szabò, 1991*] mentre, in virtù del teorema di *Lax-Milgram*, si definisce l'esistenza della soluzione e la dipendenza continua dai dati [*Bathe, 1996*].

Come riportato in precedenza il metodo degli elementi finiti consiste nel ricercare una soluzione del problema in un sottospazio approssimante di dimensione finita. Nello specifico si considera una successione $\{V_h\}$ di sottospazi definiti dal diminuire

del parametro h detto caratteristica del reticolo (*mesh*). Se per semplicità si considera che $V_{h_1} \supset V_{h_2} \supset V_{h_3}$ con $h_1 > h_2 > h_3$ la soluzione approssimata è definita come:

$$u_h = \arg \min_{v_h \in V_h} \{ \Pi(v_h) \} = \arg \min_{v_h \in V_h} \left\{ \frac{1}{2} a(v_h, v_h) + \frac{\psi}{2} \int_{\beta_e} (L(v_h))^2 dV - L_{ext}(v_h) \right\} \quad (\text{I.4.4.10})$$

Questa soluzione al discreto è unica in quanto la matrice di rigidità della struttura, che rappresenta la matrice *Hessiana* dell' E.P.T., una volta imposte le condizioni di vincolo è definita positiva. Tuttavia le proprietà matematiche che assicurano che il problema sia ben posto dipendono dalle costanti meccaniche che lo caratterizzano. In particolare per i casi di travi e piastre sottili lo spessore s dell'elemento assume un'importanza primaria in quanto, come mostrato in (I.4.4.5), il parametro ψ tende a divergere e quindi il problema risulta mal posto.

Con riferimento alla Figura I.4.4.4 [Bathe, 1996] si osserva che la distanza d tra la soluzione esatta, u , e lo spazio V_h delle soluzioni approssimate con gli elementi finiti, si può scrivere così:

$$d(u, V_h) = \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\| \simeq \|u - \bar{u}_h\| \quad (\text{I.4.4.11})$$

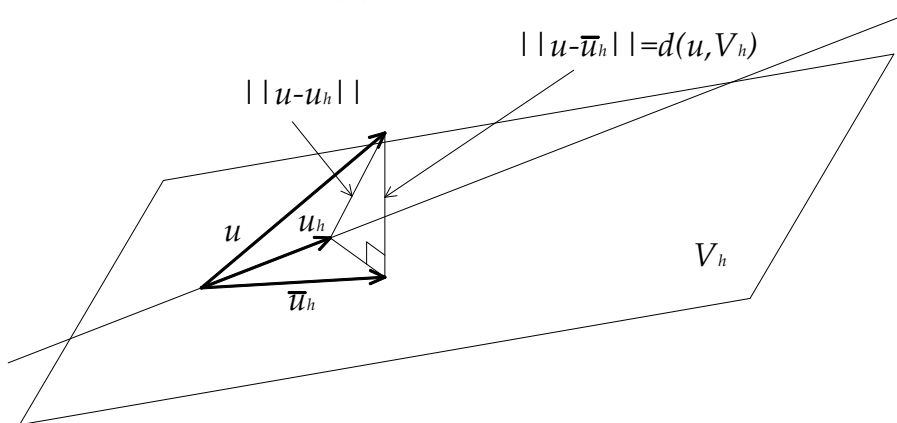


Figura I.4.4.4: rappresentazione schematica della soluzione esatta u e della distanza da questa della soluzione approssimata.

Si nota che \bar{u}_h non verifica il vincolo $L(v)$.

A seguito della discretizzazione gli spazi $K(\gamma)$ e \hat{D} , introdotti in precedenza, diventano:

$$\begin{cases} K_h(\gamma) = \{v_h \mid v_h \in V_h, L(v_h) = \gamma\} \\ \hat{D}_h = \{\gamma_h \mid \gamma_h \in L(v_h), \text{ per } v_h \in V_h\} \end{cases} \quad (\text{I.4.4.12})$$

poiché la (I.4.4.10) deve valere anche nel caso in cui $\gamma \simeq 0$ (cioè per $\psi \rightarrow \infty$) occorre definire una relazione del tipo:

$$\|u - u_h\| \leq C \cdot d(u, V_h) \quad (\text{I.4.4.13})$$

con C costante indipendente da h e da ψ .

Si ricorda inoltre che per i problemi strutturali è verificata la condizione di *ellitticità* secondo la quale:

$$a(v_h, v_h) \geq \alpha \cdot \|v_h\|^2 \quad \forall v_h \in K_h (\gamma = 0), \quad (\text{I.4.4.14})$$

dove α è un'opportuna costante positiva.

Questa condizione più restrittiva della semplice richiesta di definita positività, determina che l'energia potenziale elastica sia inferiormente limitata [Bathe, 1996; Villaggio, 1977].

La *inf-sup condition* fornisce una relazione dello stesso tipo della (I.4.4.13) e costituisce un confronto tra distanze.

In particolare la (I.4.4.13) consente di affermare che il metodo converge se la distanza tra la soluzione esatta e quella approssimata, al decrescere del parametro h (dimensione della *mesh*), diventa "piccola" ovvero si attesta sullo stesso ordine di grandezza di h .

Se si considera ora il caso $K_h(0)$ dello spazio definito per scorrimento nullo richiede, analogamente allo spazio $K(0)$, che sia soddisfatto il vincolo $\varphi = -\partial v_0 / \partial z$ ovvero che si ricada nelle ipotesi della trave di Eulero-Bernoulli e quindi, in questa situazione limite, si può scrivere:

$$\begin{aligned} u &= \arg \min_{v \in K(0)} \left\{ \frac{1}{2} a(v, v) - L_{ext}(v) \right\} \\ u_h^0 &= \arg \min_{v_h \in K_h(0)} \left\{ \frac{1}{2} a(v_h, v_h) - L_{ext}(v_h) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{I.4.4.15})$$

pertanto le (I.4.4.11) e (I.4.4.13) possono essere riscritte nella forma:

$$d(u, K_h(0)) \leq C \cdot d(u, V_h). \quad (\text{I.4.4.16})$$

La (I.4.4.14) si traduce fisicamente nel fatto che la violazione del vincolo di scorrimento nullo sia tale che le deformazioni taglienti risultino comunque trascurabili e suggerisce una condizione di vincolo più generale.

La Figura I.4.4.5 riporta gli spazi ed i vettori che concorrono alla definizione della *inf-sup condition* e rappresenta, in modo schematico, le grandezze finora discusse.

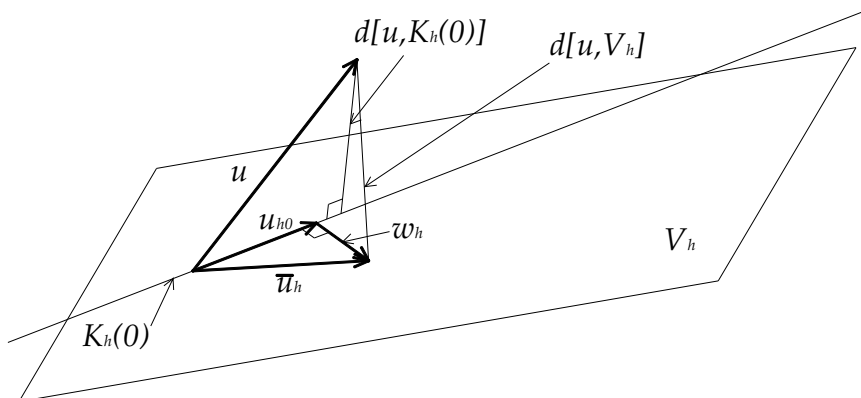


Figura I.4.4.5: Spazi e vettori che vengono considerati per derivare la *inf-sup condition*.

Se si pone:

$$\bar{u}_h = u_{h0} + w_h, \quad (I.4.4.17)$$

dove w_h è assunto ortogonale al vincolo ed è quindi una misura della violazione dello stesso. Si può dimostrare [Bathe, 1996] che la (I.4.4.17) è verificata se viene soddisfatta la seguente posizione:

$$\|w_h\| \leq C' \|\gamma_h\| \quad \forall \gamma_h \in D_h \quad \forall w_h \in K_h(\gamma_h), \quad (I.4.4.18)$$

con C' indipendente da h e da ψ .

Riscrivendo la (I.4.4.16) nella forma:

$$\|w_h\| \|\gamma_h\| \leq C' \|\gamma_h\|^2 = C' \int_{\beta_c} \gamma_h (L(v_h)) dV \quad \forall \gamma_h \in D_h \quad \forall w_h \in K_h(\gamma_h) \quad (I.4.4.19)$$

minimizzando rispetto a γ_h , quindi ponendosi nella situazione limite, e massimizzando rispetto a w_h , quindi rispetto alla violazione del vincolo, si ottiene:

$$\inf_{\gamma_h \in D_h} \sup_{v_h \in V_h} \frac{\int \gamma_h L(v_h) dV}{\|\gamma_h\| \|v_h\|} \geq \frac{1}{C'} > 0 \quad (I.4.4.20)$$

nota come *inf-sup condition*. La (I.4.4.20) se rispettata consente di affermare la convergenza e la stabilità di un qualunque modello agli elementi finiti. In generale l'applicazione della *inf-sup condition* è piuttosto complessa e di norma si preferisce utilizzare criteri più semplici (come verrà mostrato nel Capitolo II) che consentono, seppur limitatamente a specifiche tipologie di elementi finiti, di soddisfare sia la condizione di *ellitticità* che la *inf-sup condition*.

I.4.5. Esempi numerici di *locking*

Implementando gli elementi di trave piana, rettilinea e curva, deformabili a taglio si ottiene:

- Mensola caricata all'estremo libero (Figura I.4.4.4). Dal test si osserva il fenomeno dello *shear-locking* (Tabella I.4.4.1):

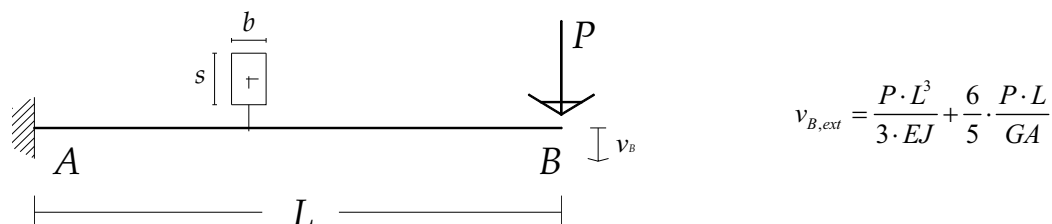


Figura I.4.4.4: Trave a mensola.

b [cm]	s [cm]	L [cm]	s/L	# di elem.	# di nodi	v/v_{ext}	err. %
20	200	200	1	100	101	1.0000	0.00
20	100	200	1/2	100	101	0.9999	0.01
20	50	200	1/4	100	101	0.9995	0.05
20	25	200	1/8	100	101	0.9980	0.20
20	10	200	1/20	100	101	0.9874	1.27
20	1	200	1/200	100	101	0.4482	56.18

Tabella I.4.4.1: Spostamenti trasversali per la trave a mensola al variare del rapporto s/L .

In tabella si evidenzia un progressivo irrigidimento del modello al crescere della snellezza della trave, questo fenomeno di *locking* è causato dal fatto che la deformazione tagliante $\gamma = \partial v / \partial z + \varphi$ deve essere nulla per travi snelle. Ciò però non avviene in quanto, nel modello, γ è la somma di una funzione costante ($\partial v / \partial z$) e di una lineare (φ) e quindi non può essere nulla (Figura I.4.4.5).

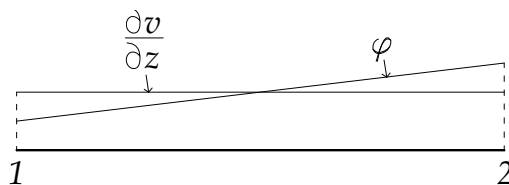


Figura I.4.4.5: Interpretazione grafica del fenomeno dello *shear-locking*.

- Quarto di cerchio incastrato a un estremo e caricato al secondo (Figura I.4.4.6).

Dal test si osserva il fenomeno del *membrane-locking* (Tabella I.4.4.2):

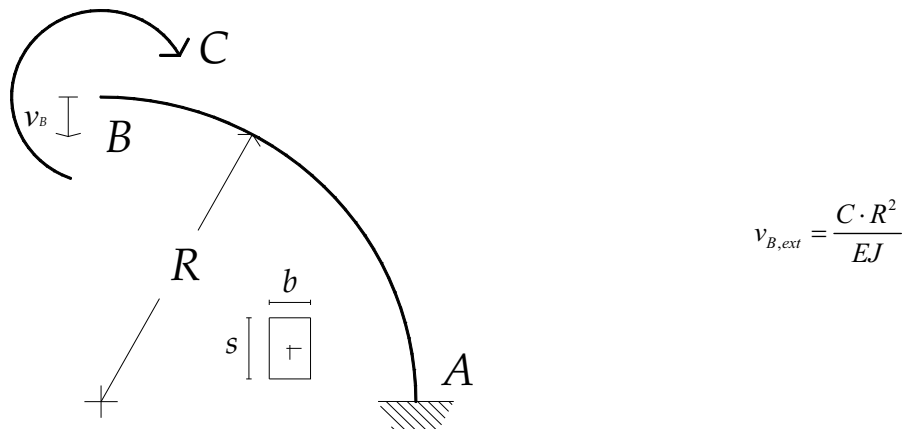


Figura I.4.4.6: Trave a mensola.

b [cm]	s [cm]	R [cm]	s/R	# di el.	# di nodi	v/v_{ext}	err. %	ε_0
20	200	200	1	1	3	1.0010	0.09750	2.37e-6
20	100	200	1/2	1	3	1.0115	1.1473	2.03e-5
20	50	200	1/4	1	3	1.0257	2.5698	1.77e-4
20	25	200	1/8	1	3	1.0341	3.4071	1.49e-3
20	10	200	1/20	1	3	1.0354	3.5364	2.36e-2
20	1	200	1/200	1	3	0.8367	16.3315	19.13

Tabella I.4.4.2: Spostamenti trasversali per il quarto di cerchio al variare del rapporto s/R e deformazione assiale nel 1° di 3 punti di Gauss.

In tabella si evidenzia un incremento progressivo della deformazione assiale $\varepsilon_0 = \partial w / \partial z - v/R$ che deve essere nulla. Ciò non avviene in quanto, nel modello, ε_0 è la somma di una funzione lineare ($\partial w / \partial z$) e di una parabolica (v/R) e quindi non può essere nulla.

Oltre alla predisposizione a fenomeni di *locking* costituisce un ulteriore limite degli elementi finiti agli spostamenti il fatto che sia necessario definire a priori il fattore di taglio k_T che, com'è noto, assume il valore $6/5$ solo nel caso di sezione *rettangolare* soggetta a taglio costante.

Bibliografia

- [1] Ascione L., Fraternali F. 1986. *Sulla statica delle travi ad asse curvo* – Università di Salerno - Facoltà di Ingegneria – Istituto di Ingegneria Civile.
- [2] Babuška I., Szabò B. 1991. *Finite element analysis* – John Wiley and Sons, Inc. – New York.
- [3] Bathe K.J. 1996. *Finite element procedures in engineering analysis* – Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [4] Brezzi F., Fortin M. 1991. *Mixed and hybrid finite element methods* – Springer Verlag, New York.
- [5] Brezzi F. 2007. *Theoretical aspect of numerical locking and of its cure* – Istituto Universitario di Studi Superiori, Pavia.
- [6] Corradi Dell'acqua L. 1992. *Meccanica delle strutture (vol.2) "le teorie strutturali e il metodo degli elementi finiti"* – McGraw-Hill, Milano.
- [7] Gambarotta L., Nunziante L., Tralli A. 2003. *Scienza delle costruzioni* – McGraw-Hill, Milano.
- [8] Pian T.H.H., Wu C.C. 2006. *Hybrid and incompatible finite elements methods* – CRC, Broken Sound Parkway, NW.
- [9] Reddy J.N. 1997. *On locking-free shear deformable beam finite elements*. *Computer Methods in Applied Mechanics Engineering*, **149**: 113-132
- [10] Villaggio P. 1977. *Qualitative Methods in elasticity* – Noordhoff International Publishing, Leyden, Netherland.
- [11] Washizu K. 1982. *Variational Methods in elasticity and plasticity* – Pergamon Press, Oxford.
- [12] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. 2000. *The finite element method, 5th edition* – Butterworth-Heinemann, Oxford.

Capitolo II

ELEMENTI FINITI MISTO – IBRIDI

II.1. Introduzione

Come mostrato nel capitolo 1 gli elementi finiti per lastre piane e curve derivati dall'approccio classico agli spostamenti possono presentare fenomeni di *shear* e *membrane-locking* e, come ulteriore svantaggio, richiedono di assumere a priori il fattore di riduzione dell'area a taglio, problema di non facile soluzione per le strutture in composito laminato.

È ben noto che per evitare il fenomeno dello *shear-locking* è possibile adottare varie tecniche, come per esempio: eseguire l'integrazione numerica ridotta (su un solo punto di Gauss) per l'energia di deformazione associata al taglio [Bathe, 1996] oppure, per la trave rettilinea, adottare un campo di spostamento trasversale approssimato tramite polinomi di Hermite modificati [Reddy, 1997] o ancora arricchendo il campo di spostamento tramite l'inserimento di nodi intermedi grazie ai quali è possibile introdurre funzioni di forma aggiuntive (a bolla) dette *bubble function* per formulare modelli incompatibili, [Pian, Wu, 2006; Wilson, 1973; Wilson, Ibrahimbegovic, 1990].

Tutte queste tecniche sono ausiliarie all'approccio agli spostamenti ma non ne risolvono in modo esaustivo i limiti; infatti non viene garantita l'assenza di *membrane-locking* e rimane necessario assumere a priori il fattore di taglio; per ovviare

a questi inconvenienti è possibile adottare tipi di elementi finiti diversi, non più basati sul solo approccio agli spostamenti.

In particolare gli *elementi finiti a più campi di tipo misto – ibridi* basati sui funzionali di Hu-Washizu o di Hellinger-Reissner non presentano in genere fenomeni di *locking*: nei funzionali che li definiscono, infatti, non sono presenti equazioni di vincolo al continuo che devono essere soddisfatte puntualmente anche al discreto [si veda Brezzi, Fortin 1991].

Prima di passare ad un'analisi di questi ultimi si presentano brevemente gli elementi incompatibili per metterne in evidenza alcune peculiari caratteristiche.

II.2. Elementi finiti agli spostamenti incompatibili

Gli elementi finiti agli spostamenti sono basati sul principio di minimo dell'Energia Potenziale Totale (E.P.T.) che, per il generico elemento finito, si scrive:

$$\Pi = \int_{\beta_e} \left[\frac{1}{2} (\underline{D}\underline{u})^T \underline{C} (\underline{D}\underline{u}) - \underline{u}^T \underline{B} \right] dV - \int_{\partial\beta_e} [\underline{u}^T \underline{f}] dA. \quad (\text{II.2.1})$$

Questo funzionale in soluzione deve risultare stazionario. [si veda Pian, Wu; 2006].

Nella (II.2.1) \underline{D} è la matrice delle condizioni di compatibilità, \underline{u} il campo di spostamenti, \underline{C} il tensore costitutivo; \underline{B} rappresenta le forze di volume e \underline{f} le forze superficiali.

Come mostrato nel capitolo I il campo di spostamento \underline{u} sul singolo elemento finito è interpolato in termini di spostamenti nodali.

Se si considera, per esempio, un elemento isoparametrico lagrangiano a quattro nodi (Figura II.2.1) le funzioni di forma interpolanti i campi di spostamento u_x e u_y sono bilineari; risultano quindi incomplete nei termini quadratici.

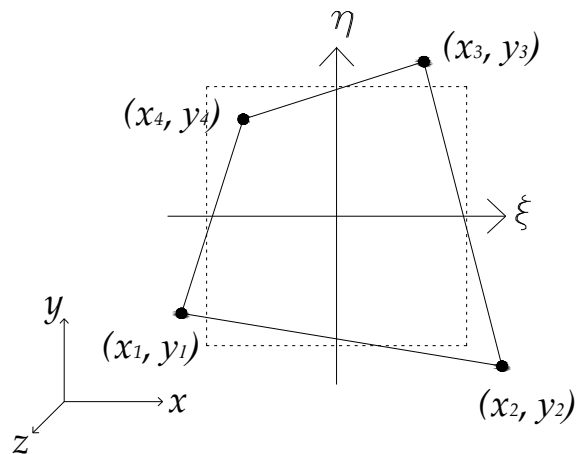


Figura II.2.1: Elemento piano isoparametrico a 4 nodi.

Aggiungendo, tramite *bubble function* (Figura II.2.2), i termini del secondo ordine i campi di spostamento diventano completi del termine quadratico. [Pian, 1964; Wilson, 197; Taylor, 1976].

In queste ipotesi il campo di deformazione sull'elemento può essere espresso come:

$$\underline{\underline{Du}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{D}}_q & \underline{\underline{D}}_\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{q} \\ \underline{\lambda} \end{bmatrix}, \quad (\text{II.2.2})$$

Dove $\underline{\underline{D}}_q$ è la matrice delle derivate delle usuali funzioni di forma, $\underline{\underline{D}}_\lambda$ la matrice delle derivate delle funzioni a bolla, \underline{q} sono gli spostamenti nodali e $\underline{\lambda}$ sono parametri interpretabili come spostamenti generalizzati che possono essere pensati come gradi di libertà interni all'elemento.

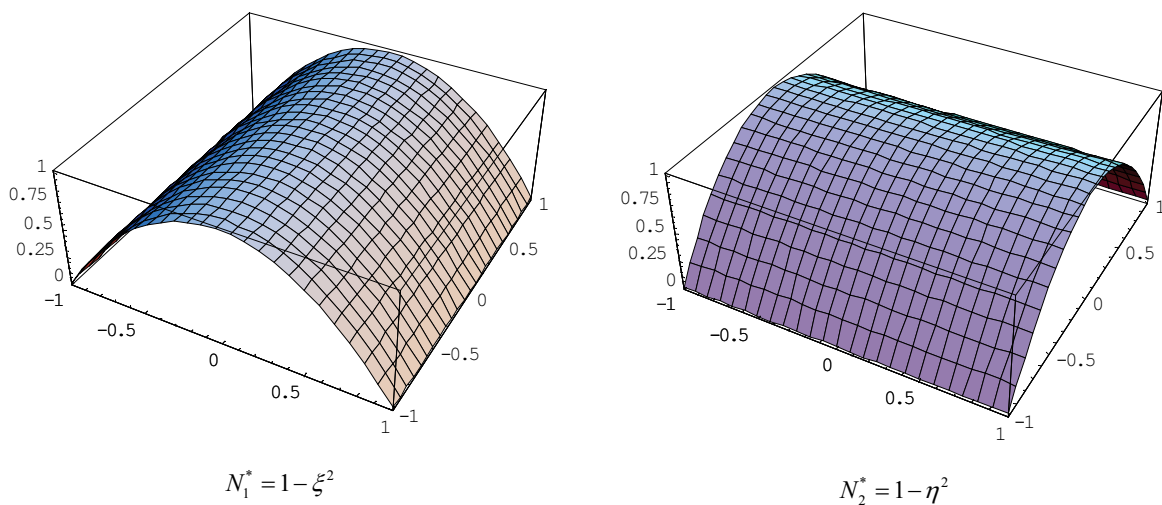


Figura II.2.2: Bubble function per elementi a 4 nodi.

Sostituendo in (II.5.1) si ottiene, tenendo conto che $\underline{\underline{K}}_{\lambda q} = \underline{\underline{K}}_{q\lambda}^T$:

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \underline{q}^T \underline{\underline{K}}_{qq} \underline{q} + \underline{\lambda}^T \underline{\underline{K}}_{\lambda q} \underline{q} + \frac{1}{2} \underline{\lambda}^T \underline{\underline{K}}_{\lambda\lambda} \underline{\lambda} - \underline{q}^T \underline{\underline{Q}}_q - \underline{\lambda}^T \underline{\underline{Q}}_\lambda, \quad (\text{II.2.3})$$

nella (II.2.3) si sono introdotte, per comodità di notazione, le matrici sotto definite:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{K}}_{qq} &= \int_{\beta_e} \left(\underline{D}^T \underline{C} \underline{D} \right) dV \\ \underline{\underline{K}}_{\lambda q} &= \int_{\beta_e} \left(\underline{D}^T \underline{C} \underline{D} \right) dV \\ \underline{\underline{K}}_{\lambda\lambda} &= \int_{\beta_e} \left(\underline{D}^T \underline{C} \underline{D} \right) dV \\ \underline{\underline{Q}}_q &= \int_{\beta_e} \left(\underline{N}^T \underline{B} \right) dV + \int_{\partial\beta_e} \left(\underline{N}^T \underline{f} \right) dV \\ \underline{\underline{Q}}_\lambda &= \int_{\beta_e} \left(\underline{N}^T \underline{B} \right) dV + \int_{\partial\beta_e} \left(\underline{N}^T \underline{f} \right) dV. \end{aligned} \quad (\text{II.2.4})$$

Condensando staticamente i gradi di libertà (interni) λ si ha:

$$\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{K}}_{qq} - \underline{\underline{K}}_{\lambda q}^T \underline{\underline{K}}_{\lambda\lambda}^{-1} \underline{\underline{K}}_{\lambda q} \quad \underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{Q}}_q - \underline{\underline{K}}_{\lambda q}^T \underline{\underline{K}}_{\lambda\lambda}^{-1} \underline{\underline{Q}}_\lambda, \quad (\text{II.2.5})$$

quindi la (II.5.3) diventa:

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \underline{q}^T \underline{\underline{K}} \underline{q} - \underline{q}^T \underline{\underline{Q}}, \quad (\text{II.2.6})$$

imponendo la stazionarietà rispetto a \underline{q} si ottiene:

$$\underline{\underline{K}} \underline{q} = \underline{\underline{Q}}. \quad (\text{II.2.7})$$

Questo tipo di elemento non presenta fenomeni di *locking* e risulta implementato in molti codici di tipo commerciale come per esempio: *Straus7*, *SuperSap*, *Feap*, *Ansys*, *ecc...*

II.3. Elementi finiti a più campi basati sul principio di Hu-Washizu

Nelle ipotesi di spostamenti e deformazioni infinitesime e materiale iperelastico lineare il funzionale di Hu-Washizu relativo a un singolo elemento finito (Figura II.3.1) si scrive come:

$$\Pi^{HW}(\underline{\varepsilon}, \underline{\sigma}, \underline{u}) = \int_{\beta_e} \left[\frac{1}{2} \underline{\varepsilon}^T \underline{\underline{C}} \underline{\varepsilon} - \underline{\sigma}^T \underline{\varepsilon} + \underline{\sigma}^T \left(\underline{D} \underline{u} \right) - \underline{B}^T \underline{u} \right] dV - \int_{\partial\beta_e^*} \left[\underline{f}^T \underline{u} \right] dA, \quad (\text{II.3.1})$$

dove $\underline{\sigma}$ è il tensore degli sforzi, $\underline{\varepsilon}$ il tensore di deformazione infinitesima, \underline{C} il tensore costitutivo, \underline{D} il tensore delle condizioni di compatibilità tra spostamenti e deformazioni, \underline{B} le forze di volume, \underline{f} le forze di superficie ed \underline{u} sono gli spostamenti. In soluzione il funzionale (II.3.1) deve risultare stazionario. [Pian, Wu; 2006].

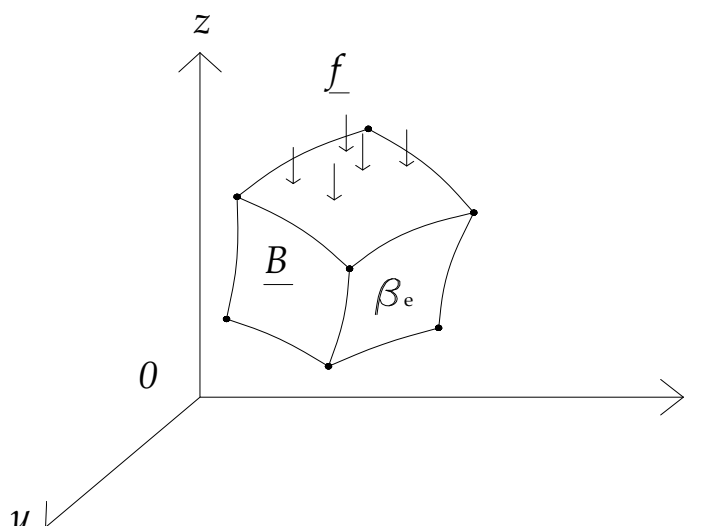


Figura II.3.1: Generico elemento finito.

Assumendo indipendenti i campi di deformazione, tensione e spostamento, vale a dire non esprimendo a priori il legame costitutivo né le condizioni di compatibilità si può scrivere:

$$\begin{cases} \underline{\varepsilon} = \underline{\psi} \underline{\alpha} \\ \underline{\sigma} = \underline{\varphi} \underline{\beta} \\ \underline{u} = \underline{N} \underline{q} \end{cases}, \quad (\text{II.3.2})$$

nelle (II.3.2) $\underline{\psi}$ sono le funzioni di forma per le deformazioni, $\underline{\varphi}$ le funzioni di forma per le tensioni ed \underline{N} quelle per gli spostamenti; inoltre $\underline{\alpha}$ e $\underline{\beta}$ sono parametri di deformazione e di tensione e \underline{q} quelli di spostamento, assunti, qui e nel seguito, in corrispondenza dei nodi. Sulla base delle (II.3.2) il funzionale di Hu-Washizu diventa:

$$\Pi_e^{HW}(\underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{q}) = \frac{1}{2} \underline{\alpha}^T \underline{A} \underline{\alpha} + \underline{\alpha}^T \underline{F} \underline{\beta} + \underline{\beta}^T \underline{G} \underline{q} - \underline{q}^T \underline{Q}, \quad (\text{II.3.3})$$

nelle (II.3.3) si sono introdotte, per brevità, queste matrici (generalizzate):

$$\begin{cases} \underline{\underline{A}} = \int_{\beta_e} \left(\underline{\underline{\psi}}^T \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\psi}} \right) dV \\ \underline{\underline{F}} = \int_{\beta_e} \left(\underline{\underline{\psi}}^T \underline{\underline{\varphi}} \right) dV \\ \underline{\underline{G}} = \int_{\beta_e} \left(\underline{\underline{\varphi}}^T \left(\underline{\underline{DN}} \right) \right) dV \\ \underline{\underline{Q}} = \int_{\beta_e} \left(\underline{\underline{N}}^T \underline{\underline{B}} \right) dV + \int_{\partial\beta_e^*} \left(\underline{\underline{N}}^T \underline{\underline{f}} \right) dA \end{cases} \quad (\text{II.3.4})$$

imponendo le condizioni di stazionarietà rispetto ai parametri di deformazione $\underline{\underline{\alpha}}$, di tensione $\underline{\underline{\beta}}$ e agli spostamenti nodali $\underline{\underline{q}}$ si ottiene:

$$\begin{cases} \underline{\underline{A}}\underline{\underline{\alpha}} + \underline{\underline{F}}\underline{\underline{\beta}} = \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{F}}\underline{\underline{\beta}} + \underline{\underline{G}}\underline{\underline{q}} = \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{G}}\underline{\underline{\beta}} = \underline{\underline{Q}} \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{F}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{F}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{G}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{G}} & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\alpha}} \\ \underline{\underline{\beta}} \\ \underline{\underline{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{Q}} \end{bmatrix}. \quad (\text{II.3.5})$$

Le tre equazioni che compaiono nella (II.3.5) rappresentano, in forma discreta, rispettivamente le equazioni costitutive, di compatibilità e di equilibrio.

Condensando staticamente i parametri $\underline{\underline{\alpha}}$ si ha:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} -\underline{\underline{F}}^T & \underline{\underline{AF}} & \underline{\underline{G}} \\ \underline{\underline{G}}^T & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\beta}} \\ \underline{\underline{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{Q}} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \underline{\underline{H}} & \underline{\underline{G}} \\ \underline{\underline{G}}^T & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\beta}} \\ \underline{\underline{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{Q}} \end{bmatrix}, \\ \underline{\underline{\alpha}} = \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{F}} \underline{\underline{\beta}} \end{cases} \quad (\text{II.3.6})$$

se quindi si condensando anche i parametri di sforzo $\underline{\underline{\beta}}$ si ottiene:

$$\begin{cases} \underline{\underline{\beta}} = \underline{\underline{H}}^{-1} \underline{\underline{G}} \underline{\underline{q}} \\ \underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{H}}^{-1} \underline{\underline{G}} \underline{\underline{q}} = \underline{\underline{Q}} \rightarrow \underline{\underline{K}}_e \underline{\underline{q}} = \underline{\underline{Q}}. \end{cases} \quad (\text{II.3.7})$$

Nel seguito si discuteranno le condizioni che consentono di scegliere in modo appropriato le funzioni interpolanti (II.3.2). Ad esempio in [Pian, Wu, 2006] Si indica che per eliminare modi di deformazione a cui corrisponde energia nulla deve essere rispettata la condizione:

$$n^\circ(\underline{\underline{\alpha}}) + n^\circ(\underline{\underline{q}}) \geq n^\circ(\underline{\underline{\beta}}) \geq n^\circ(\underline{\underline{q}}), \quad (\text{II.3.8})$$

II.4. Elementi finiti basati sul principio di Hellinger-Reissner

Una formulazione alternativa è basata dal principio variazionale di Hellinger-Reissner che, come mostrato al capitolo I, può essere ottenuto del principio di Hu-Washizu imponendo che sia soddisfatto a priori il legame costitutivo (I.3.2.3.a). Per il singolo elemento finito (Figura II.3.1) è dunque possibile scrivere:

$$\Pi_e^{HR} = \int_{\beta_e} \left[-\frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}}^T \underline{\underline{C}}^{-1} \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{\sigma}}^T (\underline{\underline{D}}u) \right] dV - \int_{\partial\beta_e} \left[\underline{\underline{f}}^T (\underline{u} - \underline{\bar{u}}) \right] dA, \quad (\text{II.4.1})$$

che in soluzione deve essere stazionario. [Pian, Wu; 2006].

Dove $\underline{\underline{\sigma}}$ è il tensore degli sforzi in notazione di Voigt, $\underline{\underline{C}}$ il tensore costitutivo, $\underline{\underline{f}}$ rappresenta le forze di superficie, \underline{u} sono gli spostamenti, $\underline{\bar{u}}$ gli spostamenti imposti mentre l'operatore $\underline{\underline{D}}$ rappresenta le condizioni di compatibilità tra spostamenti e deformazioni ($\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{D}}u$).

Il campo di spostamenti (compatibile) è approssimato dalle funzioni di forma, tipiche dei modelli agli spostamenti, in modo da avere:

$$\underline{u} = \underline{\underline{N}}q, \quad (\text{II.4.2})$$

dove q sono gli spostamenti nodali.

Per il campo di tensioni si adotta un'approssimazione funzione dei parametri $\underline{\underline{\beta}}$ di tensione mediate funzioni di forma $\underline{\underline{P}}$:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{P}}\underline{\underline{\beta}}. \quad (\text{II.4.3})$$

Il funzionale di Hellinger-Reissner si può quindi scrivere nel modo seguente:

$$\Pi_e^{HR} = -\frac{1}{2} \underline{\underline{\beta}}^T \underline{\underline{H}}\underline{\underline{\beta}} + \underline{\underline{\beta}}^T \underline{\underline{G}}q - q^T \underline{\underline{Q}}, \quad (\text{II.4.4})$$

Dove si sono usate le notazioni compatte:

$$\underline{\underline{H}} = \int_{\beta_e} \left(\underline{\underline{P}}^T \underline{\underline{C}}^{-1} \underline{\underline{P}} \right) dV \quad \underline{\underline{G}} = \int_{\beta_e} \underline{\underline{P}}^T (\underline{\underline{D}}N) dV. \quad (\text{II.4.5})$$

Imponendo la stazionarietà rispetto ai parametri di sforzo $\underline{\underline{\beta}}$ e agli spostamenti nodali q si ottiene:

$$\begin{cases} -\underline{\underline{H}}\underline{\underline{\beta}} + \underline{\underline{G}}q = \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{\beta}} = \underline{\underline{Q}} \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} -\underline{\underline{H}} & \underline{\underline{G}} \\ \underline{\underline{G}}^T & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\beta}} \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{Q}} \end{bmatrix}. \quad (\text{II.4.6})$$

Le due equazioni che compaiono nella (II.4.6) rappresentano rispettivamente, in forma discreta, le equazioni di compatibilità e di equilibrio.

Se si condensano staticamente i parametri $\underline{\beta}$ (interni a ciascun elemento) si giunge a determinare la matrice di rigidità del singolo elemento finito:

$$\begin{cases} \underline{\beta} = \underline{H}^{-1} \underline{G} \underline{q} \\ \underline{G}^T \underline{H}^{-1} \underline{G} \underline{q} = \underline{Q} \rightarrow \underline{K}_e \underline{q} = \underline{Q}. \end{cases} \quad (\text{II.4.7})$$

II.5. Elementi finiti a due campi derivati dal funzionale di Hu-Washizu

Nello studio di alcuni problemi strutturali come travi e piastre laminate risulta conveniente assumere come variabili indipendenti i campi di deformazione e i campi di spostamento.

In questo modo è possibile garantire senza particolari problemi la conservazione delle sezioni piane e quindi, nell'ambito della *FSDT*, ottenere elementi finiti di trave e piastra deformabili a taglio come usualmente richiesto per lo studio dei laminati.

In tal caso il funzionale a tre campi di Hu-Washizu viene modificato. Se si considerano soddisfatte a priori le equazioni costitutive si ottiene un funzionale a due campi che si può scrivere nella forma:

$$\Pi_{e,\text{mod}}^{HW}(\underline{\varepsilon}, \underline{u}) = \int_{\beta_e} \left[\frac{1}{2} \underline{\varepsilon}^T \underline{C} \underline{\varepsilon} - (\underline{C} \underline{\varepsilon} - \underline{B}^T) \underline{u} \right] dV + \int_{\partial\beta_e^c} [\underline{f}^T \underline{u}] dA, \quad (\text{II.5.1})$$

che deve essere stazionario in soluzione. [Cazzani, Garusi, Tralli; 2005].

Nella (II.5.1) $\underline{\varepsilon}$ è il tensore di deformazione infinitesima, \underline{C} il tensore costitutivo, \underline{B} rappresenta le forze di volume, \underline{f} le trazioni superficiali ed \underline{u} gli spostamenti.

Assumendo indipendenti tra loro i campi di deformazione e spostamento, che vengono così modellati (per il campo di spostamenti si ricorre allo stesso tipo di funzioni di forma della formulazione classica):

$$\begin{cases} \underline{\varepsilon} = \underline{\psi} \underline{\alpha} \\ \underline{u} = \underline{N} \underline{q} \end{cases}, \quad (\text{II.5.2})$$

Per le deformazioni si adotta una modellazione polinomiale in cui compaiono i parametri di deformazione $\underline{\alpha}$ e le funzioni di forma $\underline{\psi}$. Sulla base delle (II.5.2) il funzionale di Hu-Washizu modificato diventa:

$$\Pi_{e,\text{mod}}^{HW}(\underline{\alpha}, \underline{q}) = -\frac{1}{2} \underline{\alpha}^T \underline{H} \underline{\alpha} + \underline{\alpha}^T \underline{G} \underline{q} - \underline{q}^T \underline{Q}, \quad (\text{II.5.3})$$

dove:

$$\begin{cases} \underline{H} = \int_{\beta_e} \left(\underline{\psi}^T \underline{C} \underline{\psi} \right) dV \\ \underline{G} = \int_{\beta_e} \left(\underline{\psi}^T \left(\underline{D} \underline{N} \right) \right) dV \\ \underline{Q} = \int_{\beta_e} \left(\underline{N}^T \underline{B} \right) dV + \int_{\partial \beta_e^c} \left(\underline{N}^T \underline{f} \right) dA. \end{cases} \quad (\text{II.5.4})$$

Imponendo le condizioni di stazionarietà rispetto ai parametri di deformazione $\underline{\alpha}$ e agli spostamenti (nodali) \underline{q} si ottiene:

$$\begin{cases} -\underline{H} \underline{\alpha} + \underline{G} \underline{q} = \underline{0} \\ \underline{G}^T \underline{\alpha} = \underline{Q} \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} -\underline{H} & \underline{G} \\ \underline{G}^T & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\alpha} \\ \underline{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{Q} \end{bmatrix}, \quad (\text{II.5.5})$$

le due equazioni (II.5.5) rappresentano rispettivamente, in forma discreta, le equazioni di compatibilità e di equilibrio.

Come di consueto si condensano staticamente i parametri $\underline{\alpha}$ e si determina la matrice di rigidezza del singolo elemento finito:

$$\begin{cases} \underline{\alpha} = \underline{H}^{-1} \underline{G} \underline{q} \\ \underline{G}^T \underline{H}^{-1} \underline{G} \underline{q} = \underline{Q} \rightarrow \underline{K}_e \underline{q} = \underline{Q}. \end{cases} \quad (\text{II.5.6})$$

A differenza degli elementi finiti basati sul funzionale di Hellinger-Reissner in cui compare il potenziale complementare elastico, si riconosce in (II.5.1) il potenziale elastico.

II.6. Elementi finiti ibridi alle tensioni

Oltre agli elementi finiti introdotti nei paragrafi precedenti in letteratura ne vengono riportate anche altri tipi. Tra gli elementi *stress-assumed* sono da notare quelli basati sul principio di minimo dell'Energia Complementare, [Pian; 1964], la cui formulazione prevede di assumere un certo campo di tensione all'interno

dell'elemento modellato mediante opportune funzioni di forma \underline{P} (polinomiali) e parametri di sforzo $\underline{\beta}$:

$$\underline{\sigma} = \underline{P}\underline{\beta}, \quad (\text{II.6.1})$$

di spostamento sul bordo dell'elemento è così modellato:

$$\underline{\bar{u}} = \underline{L}q, \quad (\text{II.6.2})$$

e di tensioni al bordo modellate ancora in termini di parametri $\underline{\beta}$ di tensione:

$$\underline{T} = \underline{R}\underline{\beta}. \quad (\text{II.6.3})$$

In queste ipotesi il funzionale dell'energia complementare (E.C.) si scrive:

$$\Pi_c = \int_{\beta_e} \left[\frac{1}{2} \underline{\sigma}^T \underline{C}^{-1} \underline{\sigma} \right] dV - \int_{\partial\beta_e} \left[\underline{f}^T \underline{\bar{u}} \right] dA \rightarrow \Pi_c^C = \frac{1}{2} \underline{\beta}^T \underline{H}\underline{\beta} - \underline{\beta} \underline{G} q - q^T \underline{Q}, \quad (\text{II.6.4})$$

dove si sono usate le notazioni abbreviate:

$$\underline{H} = \int_{\beta_e} \left(\underline{P}^T \underline{C}^{-1} \underline{P} \right) dV \quad \underline{G} = \int_{\partial\beta_e} \left(\underline{R}^T \underline{L} \right) dA. \quad (\text{II.6.5})$$

Imposta la stazionarietà rispetto ai parametri di sforzo $\underline{\beta}$ e agli spostamenti (nodali) q si ottiene:

$$\begin{bmatrix} -\underline{H} & \underline{G} \\ \underline{G}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\beta} \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{Q} \end{bmatrix} \quad (\text{II.6.6})$$

si condensano ancora staticamente i parametri di sforzo $\underline{\beta}$ e si determina la matrice di rigidità del singolo elemento finito:

$$\begin{cases} \underline{G}^T \underline{H}^{-1} \underline{G} q = \underline{Q} \rightarrow \underline{K}_e q = \underline{Q} \\ \underline{\beta} = \underline{H}^{-1} \underline{G} q \end{cases} \quad (\text{II.6.7})$$

Una seconda famiglia di elementi finiti del tipo *stress-assumed* detto *Hybrid Trefftz* considera soddisfatte a priori le condizioni di compatibilità e di equilibrio [Pian, Wu; 2006]. Ciò comporta che il campo di tensioni assunto soddisfi le condizioni omogenee di equilibrio e che le deformazioni conseguenti soddisfino le condizioni di compatibilità.

In queste ipotesi il principio di minimo dell'Energia Complementare si scrive come:

$$\Pi_c = \int_{\beta_e} \left[-\frac{1}{2} \left(\underline{D}^T \underline{\sigma} \right)^T \underline{u} \right] dV - \int_{\partial\beta_e} \left[\frac{1}{2} \underline{f}^T \underline{u} - \underline{f}^T \underline{\bar{u}} \right] dA, \quad (\text{II.6.8})$$

avendo imposto che il campo di tensione soddisfi le condizioni omogenee di equilibrio il primo integrale è identicamente nullo e quindi la (II.6.8) diventa:

$$\Pi_c = \int_{\partial\beta_e} \left[\frac{1}{2} \underline{f}^T \underline{u} - \underline{f}^T \underline{\bar{u}} \right] dA. \quad (\text{II.6.9})$$

Che in soluzione deve essere stazionario.

Assumendo che i campi di tensione, di spostamento e di spostamento imposto siano indipendenti, li si può modellare come segue:

$$\begin{cases} \underline{\sigma} = \underline{P}\underline{\beta} \\ \underline{u} = \underline{U}\underline{\beta} \\ \underline{\bar{u}} = \underline{L}\underline{q} \\ \underline{f} = \underline{v}\underline{\sigma} = \underline{R}\underline{\beta} \end{cases} \quad (\text{II.6.10})$$

Nelle (II.6.10) \underline{P} , \underline{U} , \underline{L} sono funzioni di forma relative, rispettivamente, ai campi di sforzo, di spostamenti e di spostamenti impressi (questi ultimi due modellati sugli spostamenti nodali). Si noti che tutti i campi sono modellati solo sul bordo.

La (II.6.9) diventa così:

$$\Pi_c = \frac{1}{2} \underline{\beta}^T \underline{H}\underline{\beta} - \underline{\beta}\underline{G}\underline{q} - \underline{q}^T \underline{Q}, \quad (\text{II.6.11})$$

dove per brevità le matrici indicate sono:

$$\underline{H} = \frac{1}{2} \int_{\partial\beta_e} \left(\underline{R}^T \underline{U} + \underline{U}^T \underline{R} \right) dA \quad \underline{G} = \int_{\partial\beta_e} \left(\underline{R}^T \underline{L} \right) dA. \quad (\text{II.6.12})$$

Imposta la stazionarietà rispetto ai parametri $\underline{\beta}$ e agli spostamenti (nodali) \underline{q} si ha:

$$\begin{bmatrix} -\underline{H} & \underline{G} \\ \underline{G}^T & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\beta} \\ \underline{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{Q} \end{bmatrix} \quad (\text{II.6.13})$$

Procedendo come di consueto mediante condensazione statica si determina, ancora una volta, la matrice di rigidezza del singolo elemento finito:

$$\begin{cases} \underline{\beta} = \underline{H}^{-1} \underline{G}\underline{q} \\ \underline{G}^T \underline{H}^{-1} \underline{G}\underline{q} = \underline{Q} \rightarrow \underline{K}_e \underline{q} = \underline{Q}. \end{cases} \quad (\text{II.6.14})$$

II.7. Requisiti di base per elementi misto - ibridi

E' ben noto (vedi capitolo I) che il criterio matematico che determina se un modello misto – ibrido è stabile e convergente è la cosiddetta *inf-sup condition* o *LBB condition* (*Ladyzhenskaya – Brezzi - Babuška*) assieme alla condizione di *ellitticità* [Brezzi, Fortin; 1991, Bathe; 1996]. Un'analisi critica di queste condizioni generali per i metodi misti e delle procedure numeriche per la loro valutazione in specifici problemi (*inf-sup test*) è riportato in [Bathe; 2001].

II.8. Applicazioni ai modelli strutturali

Con riferimento a quanto presentato nel paragrafo I.4.4 si considera come primo esempio il caso della trave deformabile a flessione e taglio (Figura II.8.1).

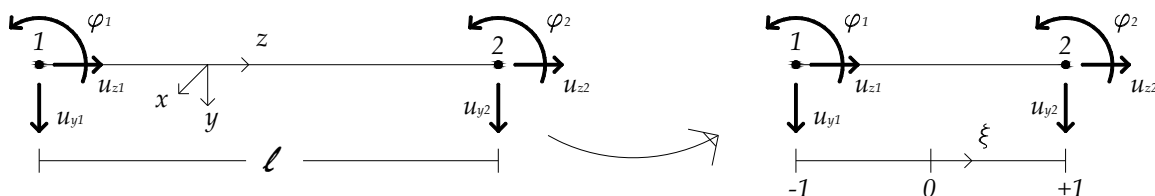


Figura II.8.1: Modello agli elementi finiti per la trave di Timoshenko.

Considerando l'elemento finito Lagrangiano lineare isoparametrico l'E.P.T. si scrive:

$$\Pi(\underline{v}) = \Phi(\underline{u}) - L_{ext}(\underline{u}) = \frac{1}{2} \int_0^\ell \left[\left(\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \right)^2 + \psi(L(\underline{u}))^2 \right] dz - \int_0^\ell (q_w u_x + q_v u_y + m \varphi) dz, \quad (II.8.1)$$

mentre gli spazi $K_h(\gamma)$ e D_h sono definiti come:

$$\begin{cases} K_h(\gamma) = \{ \underline{u}_h \mid \underline{v}_h \in \underline{V}_h, L(\underline{u}_h) = \gamma \} \\ D_h = \{ \gamma_h \mid \gamma_h \in L(\underline{u}_h), \text{ per } \underline{u}_h \in \underline{V}_h \} \end{cases} \quad (II.8.2)$$

In questo caso la condizione di ellitticità diventa:

$$EJ \int_0^\ell \left(\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \right)^2 dz \geq \alpha \|u_h\|^2 \quad \alpha \in \mathbb{R}^+, \quad (II.8.3)$$

infatti si ha:

$$\|u_h\|^2 = \int_0^\ell \left[\left(\ell \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y^0(z)}{\partial z} \right)^2 \right] dz; \quad \|\gamma_h\|^2 = \int_0^\ell (\gamma^2) dz, \quad (II.8.4)$$

quindi risulta:

$$\int_0^\ell (u_{y,h}^0)^2 dz = \int_0^\ell (\varphi^2) dz \leq \int_0^\ell (\ell^2 \varphi^2) dz \rightarrow \|u_h\|^2 \leq 2\ell^2 \int_0^\ell (\varphi^2) dz, \quad (\text{II.8.5})$$

con $\alpha = EJ/2\ell^2$. La *inf-sup condition* si scrive nella forma seguente:

$$\inf_{\gamma_h \in D_h} \sup_{v_h \in V_h} \frac{\int_0^\ell \gamma_h [u_{y,h}^0 + \varphi_h] dz}{\|\gamma_h\| \|u_h\|} \geq \frac{1}{C'} > 0. \quad (\text{II.8.6})$$

ma per l'elemento in esame il termine $[u_{y,h}^0 + \varphi_h] = \gamma_h = 0$ e quindi la II.8.6. è palesemente violata e infatti, come mostrato nei test numerici nel paragrafo I.4.5., l'elemento presenta *shear-locking*.

Al contrario, scrivendo un elemento misto, ad esempio a 3 campi, con interpolanti per u_x , u_y e φ sempre di tipo lagrangiano lineare e con γ costante si ottiene per il caso test $u_{y,h}^0 = \gamma_h$ [Garusi, Tralli; 2001]:

$$\frac{\int_0^\ell \gamma_h [u_{y,h}^0 + \varphi_h] dz}{\|u_h\|} = \sqrt{\int_0^\ell (\gamma_h)^2 dz}, \quad (\text{II.8.7})$$

quindi la *inf-sup condition* diventa:

$$\inf_{\gamma_h \in D_h} \sup_{v_h \in V_h} \frac{\int_0^\ell \gamma_h [u_{y,h}^0 + \varphi_h] dz}{\|\gamma_h\| \|u_h\|} \geq 1. \quad (\text{II.8.8})$$

Che risulta questa volta soddisfatta e, come evidenziato nei test numerici riportati nel capitolo III, l'elemento non presenta *shear-locking*. Si deve comunque precisare che assumere γ costante a tratti si traduce nell'imporre in media elemento per elemento il vincolo $[u_{y,h}^0 + \varphi_h] = \gamma_h = 0$ che tuttavia rimane non soddisfatto puntualmente.

Per il caso della piastra deformabile a flessione e taglio è possibile procedere in modo analogo e pervenire quindi alla scrittura della *inf-sup condition*; per la trattazione matematica si rimanda a [Bathe; 2001].

II.9. Condizioni di convergenza derivate dalle equazioni al discreto

Come evidenziato nei paragrafi precedenti per tutti gli elementi finiti di tipo misto – ibridi si perviene ad una forma finale della matrice di rigidezza a livello di elemento \underline{K}_e del tipo:

$$\underline{K}_e = \underline{G}^T \underline{H}^{-1} \underline{G}. \quad (\text{II.9.1})$$

Occorre premettere che gli autovalori nulli e i corrispondenti autovettori della (II.9.1) rappresentano i moti rigidi che caratterizzano il modello strutturale studiato (per esempio, nel caso della trave nel piano si hanno tre moti rigidi, ecc..) e pertanto la (II.9.1) evidenzia la necessità che il rango della matrice \underline{G} non sia minore della dimensione della matrice di rigidezza \underline{H} .

Comunque si decida di procedere, mediante il principio di Hellinger-Reissner, il principio di minimo dell'Energia Complementare o il principio di Hu-Washizu, è possibile definire l'elemento finito sulla base di pochi criteri che, però, non consentono di controllare fino in fondo la risposta e l'accuratezza dell'elemento. Per le formulazioni presentate gli unici criteri individuabili sono connessi al soddisfacimento del *patch test*, requisito di *consistenza*, ed alla richiesta di solvibilità del sistema discreto, requisito di *stabilità*.

Tali requisiti possono essere formulati nel modo seguente:

- la rappresentazione dei campi di tensione\deformazione deve includere i campi costanti.
- indicando con n_β e n_q rispettivamente il numero dei parametri di tensione\deformazione e il numero dei parametri cinematici dell'elemento, la seguente relazione deve essere soddisfatta:

$$n_\beta \geq n_q - n_r. \quad (\text{II.9.2})$$

Dove n_r individua il numero di moti rigidi.

Vengono detti *ottimali* gli elementi che soddisfano la (II.9.29 con il segno di uguaglianza. Si osservi che i campi di tensione\deformazione possono essere discontinui all'inter-elemento in quanto la loro continuità non è richiesta a priori dal

principio variazionale. Se per esempio si considera il caso della trave si osserva che ponendo γ costante elemento per elemento, è possibile verificare la condizione di stabilità. In [Bathe, 1996] è riportata una trattazione matematica più rigorosa.

Fissata una *mesh* di dimensione caratteristica h si considera il sistema delle equazioni discretizzate che, in forma matriciale, si scrive:

$$\begin{bmatrix} -\underline{H} & \underline{G} \\ \underline{G}^T & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\beta} \\ \underline{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{Q} \end{bmatrix}, \quad (\text{II.9.3})$$

la stabilità e la conseguente solvibilità del sistema di equazioni (II.9.3.) sono legate alle due seguenti condizioni:

$$\begin{cases} \underline{V}_h^T \underline{H} \underline{V}_h > 0 & \forall \underline{V}_h \mid \underline{G}^T \underline{V}_h = \underline{0} & (a) \\ \underline{G} \underline{R}_h = \underline{0} \rightarrow \underline{R}_h = \underline{0} & & (b) \end{cases} \quad (\text{II.9.4})$$

Lo spazio vettoriale \underline{V}_h che soddisfa la (II.9.4.a) rappresenta il *kernel* o *nucleo* di \underline{G}^T .

Nella pratica un problema è stabile se, considerata una perturbazione dei dati iniziali (indicata con $\Delta \underline{Q}_h$), la soluzione dipende con continuità da questi, sia in termini di spostamenti nodali, sia di parametri interni in modo che, se δ è un numero reale positivo piccolo a piacere, si ha:

$$\frac{\|\Delta \underline{q}_h\| + \|\Delta \underline{\beta}_h\|}{\|\underline{q}_h\| + \|\underline{\beta}_h\|} \leq \delta \frac{\|\Delta \underline{Q}_h\|}{\|\underline{Q}_h\|}, \quad (\text{II.9.5})$$

quindi la (II.9.3) si può riscrivere:

$$\begin{bmatrix} -\underline{H} & \underline{G} \\ \underline{G}^T & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \underline{\beta}_h \\ \Delta \underline{q}_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \Delta \underline{Q}_h \end{bmatrix}. \quad (\text{II.9.6})$$

La formulazione è dunque stabile se, per ogni sequenza di *mesh*, la costante δ è limitata. La condizione di stabilità, come detto nel capitolo I, è subordinata alla condizione necessaria di *ellitticità* che per il caso discreto si scrive:

$$\underline{V}_h^T \underline{H} \underline{V}_h \geq \alpha \|\underline{u}_h\|^2 \quad \forall \underline{V}_h \in \ker(\underline{G}); \alpha > 0 \quad (\text{II.9.7})$$

Mente la condizione necessaria e sufficiente per la stabilità rimane la *inf-sup condition* che, fissato ρ indipendentemente dalla dimensione h della *mesh*, si scrive:

$$\inf_{\underline{R}_h} \sup_{\underline{V}_h} \frac{\underline{R}_h^T \underline{G} \underline{V}_h}{\|\underline{r}_h\| \|\underline{u}_h\|} \geq \rho > 0 \quad (\text{II.9.8})$$

Nella pratica è possibile procedere a controlli sull'entità degli autovalori delle matrici. In particolare la matrice \underline{H}_h deve avere autovalori tutti positivi (definita positiva) mentre la matrice \underline{G}_h , come detto in precedenza, deve avere rango pari alla dimensione di \underline{H}_h . Se si considera il caso in cui la matrice \underline{G}_h sia in forma diagonale (eventualità possibile nel caso di scelta appropriata dei vettori di base per la rappresentazione dei campi di spostamento e delle variabili interne) si ha:

$$G_h = \left[\begin{array}{cccc|ccc} \sqrt{\lambda_n} & 0 & 0 & 0 & \overbrace{0 \ 0 \ 0}^{\ker(G_h)} & & \\ 0 & \sqrt{\lambda_{n-1}} & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\lambda_k} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}} \right\} \begin{array}{l} n_q \\ \\ \\ \\ \\ \ker(G_h) \end{array} \quad (II.9.9)$$

Le colonne nulle definiscono i vettori del kernel di G_h , ogni colonna rappresenta un modo spurio che di seguito verrà detto *Zero Energy Mode*.

II.9.1. Inf-sup test

Volendo procedere al test (II.9.8) per il caso delle equazioni al discreto (II.9.3) è possibile partire dalla seguente scrittura della *inf-sup condition*:

$$\inf_{w_h \in W_h} \sup_{v_h \in V_h} \frac{\int [\underline{\beta}_h L(w_h) L(v_h)] dV}{\|\underline{\beta}_h L(w_h)\| \|v_h\|} \geq \rho > 0, \quad (II.9.1.1)$$

che in forma matriciale corrisponde a scrivere:

$$\inf_{W_h} \sup_{V_h} \frac{W_h^T \underline{Z}_h V_h}{\left[W_h^T \underline{Z}_h W_h \right]^{1/2} \left[V_h^T \underline{S}_h V_h \right]^{1/2}} \geq \rho > 0. \quad (II.9.1.2)$$

Dove \underline{Z}_h ed \underline{S}_h rappresentano l'operatore $\int [\underline{\beta}_h L(w_h) L(v_h)] dV$ e l'operatore norma e sono rispettivamente semi-definita e definita positiva.

È quindi di fondamentale importanza la valutazione del valore della costante ρ che compare nella (II.9.1.2).

Si dimostra che tale valore è dato dalla radice quadrata dell'autovalore minimo di:

$$\left[\underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{H}} \underline{\underline{G}} \right] \underline{\Phi}_h = \lambda \underline{\underline{S}}_h \underline{\Phi}_h. \quad (\text{II.9.1.3})$$

Quindi se esistono $k-1$ autovalori nulli (dati dal fatto che $\left[\underline{\underline{G}}_h^T \underline{\underline{H}}_h \underline{\underline{G}}_h \right]$ è una matrice semi-definita positiva) e i restanti si ordinano in modo crescente si ha che il valore assunto dalla inf-sup condition è $\sqrt{\lambda_k}$. Nella pratica la condizione di ellitticità e la *inf-sup condition* possono essere verificate attraverso metodi empirici di facile utilizzo e comune impiego in letteratura tecnica ma che comunque non costituiscono condizioni necessarie e sufficienti. Questi metodi verranno presentati nel seguito così come discussi in [Pian, Wu; 2006].

II.9.2. Elementi misto – ibridi ottimali

Si consideri come esempio un elemento misto – ibrido alle tensioni al quale si applicano vincoli sufficienti a eliminare i moti rigidi. Introducendo la forma discreta del funzionale libero, nella quale il campo di spostamento è approssimato da un'interpolazione degli spostamenti nodali ed il campo tensionale è interpolato in base a dei parametri lagrangiani $\underline{\beta}$, si ha:

$$\Pi_e(\underline{\beta}, \underline{d}) = \underline{\beta}^T \underline{\underline{G}} \underline{d} - \frac{1}{2} \underline{\beta}^T \underline{\underline{H}} \underline{\beta}. \quad (\text{II.9.2.1})$$

Nella (II.9.2.1) $\underline{\beta}$ rappresenta il vettore dei parametri lagrangiani del campo tensionale, \underline{d} il vettore dei gradi di libertà dell'elemento al netto dei moti rigidi, $\underline{\underline{H}}$ la matrice definita positiva data dall'Energia Complementare mentre la matrice $\underline{\underline{G}}$ deve sottostare alla seguente condizione:

$$\text{rank}(\underline{\underline{G}}) = \min(n_\beta, n_d) \quad (\text{II.9.2.2})$$

con n_β e n_d pari, rispettivamente, al numero dei parametri di tensione e al numero dei parametri cinematici dell'elemento al netto dei moti rigidi. Dalla condizione di stazionarietà del funzionale di Hellinger-Reissner II.9.2.1. rispetto ai parametri di

tensione $\underline{\beta}$ e cinematici \underline{d} si ottengono le seguenti espressioni che, come noto, corrispondono al P.L.V.:

$$\begin{aligned} \delta \underline{\beta}^T (\underline{G} \underline{d} - \underline{H} \underline{\beta}) &= \underline{0} & (a) \\ \delta \underline{d}^T (\underline{G}^T \underline{\beta}) &= \underline{0} & (b) \end{aligned} \quad (\text{II.9.2.3})$$

dalle (II.9.2.39) si ottengono rispettivamente:

$$\begin{aligned} \underline{\beta} &= \underline{W} \underline{d} = \underline{H}^{-1} \underline{G} \underline{d} & (a) \\ \underline{G}^T \underline{\beta} &= \underline{0} & (b) \end{aligned} \quad (\text{II.9.2.4})$$

In cui la matrice \underline{W} ha dimensione $n_\beta \times n_d$ e quindi può essere:

- Rettangolare *alta* (con un numero di righe maggiore al numero di colonne, $n_\beta > n_d$). In questo caso la (II.9.2.4.a) presenta un numero di equazioni maggiore del numero di parametri $\underline{\beta}$; e quindi, se $n_\beta > n_d$, si ottiene un elemento più rigido che presenta fenomeni di *locking*.
- Rettangolare *bassa* (con un numero di colonne maggiore del numero di righe, $n_\beta < n_d$). In questo caso la (II.9.2.4.a) presenta un numero di equazioni minore al numero di di parametri $\underline{\beta}$; e quindi si ottiene un elemento più deformabile che presenta *Zero Energy Mode* relativi al campo di spostamento (ZEM_u). Con *Zero Energy Mode* si intende, come meglio verrà chiarito nel seguito, modi deformativi diversi tra loro a cui corrisponde la stessa energia.
- Quadrata, $n_\beta = n_d$ (*elemento ottimale*). In questo caso entrambe le (II.9.2.4) hanno lo stesso numero di equazioni e di incognite e l'elemento viene detto ottimale. La condizione $n_\beta = n_d$ è necessaria per avere elementi misto – ibridi esenti da ZEM_u e fenomeni di *locking* ma non è anche sufficiente.

II.9.3. Definizione degli *Zero Energy Mode* (ZEM)

In primo luogo è necessario fare una distinzione tra *Zero Energy Mode* relativi al campo di spostamento, denotati da (ZEM_u), e *Zero Energy Mode* relativi al campo di tensione\deformazione, indicati come (ZEM_β).

Un eventuale incremento di spostamento $\Delta \underline{u}$ o di tensione\deformazione $\Delta \underline{\sigma} \setminus \Delta \underline{\varepsilon}$ non comporta ZEM nel caso in cui siano verificate rispettivamente le due seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} \Delta \Pi(\Delta \underline{u}) &\equiv \Pi(\underline{\sigma} \setminus \underline{\varepsilon}, \underline{u} + \Delta \underline{u}) - \Pi(\underline{\sigma} \setminus \underline{\varepsilon}, \underline{u}) = 0 & \forall \underline{\sigma} \setminus \underline{\varepsilon} \\ \Delta \Pi(\Delta \underline{\sigma} \setminus \Delta \underline{\varepsilon}) &\equiv \Pi[(\underline{\sigma} + \Delta \underline{\sigma}) \setminus (\underline{\varepsilon} + \Delta \underline{\varepsilon}), \underline{u}] - \Pi(\underline{\sigma} \setminus \underline{\varepsilon}, \underline{u}) = 0 & \forall \underline{u} \end{aligned} \quad (\text{II.9.3.1})$$

II.9.4. Rank condition per elementi misto – ibridi

Considerando elementi a due campi, per esempio le deformazioni $\underline{\varepsilon}$ o le tensioni $\underline{\sigma}$ e gli spostamenti \underline{u} , i funzionali liberi che li descrivono sono del tipo $\Pi = \Pi(\underline{\varepsilon} \setminus \underline{\sigma}, \underline{u})$ e sono formati da due contributi il potenziale elastico (II.9.4.1.a) o il potenziale complementare (II.9.4.1.b):

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{2} \int_{\beta_e} (\underline{D}\underline{u})^T \underline{C} (\underline{D}\underline{u}) dV & (a) \\ \Phi_c &= \frac{1}{2} \int_{\beta_e} \underline{\sigma}^T \underline{C}^{-1} \underline{\sigma} dV & (b) \end{aligned} \quad (\text{II.9.4.1})$$

a cui si somma un secondo termine integrale tra quelli sotto riportati:

$$I(\underline{\sigma}, \underline{u}) = \left\{ \int_{\beta_e} \underline{\sigma}^T (\underline{D}\underline{u}) dV; \int_{\beta_e} (\partial \underline{\sigma})^T \underline{u} dV; \int_{\partial \beta_e} (\underline{T}^T \tilde{\underline{u}}) dA \right\} \quad (\text{II.9.4.2})$$

Dove \underline{D} è l'operatore di congruenza (sicché $\underline{D}\underline{u}$ individua le deformazioni associate al campo di spostamenti \underline{u}), \underline{C} è il tensore costitutivo; \underline{T} le trazioni sul bordo dell'elemento e $\tilde{\underline{u}}$ gli spostamenti sul bordo vincolato dell'elemento. Se si considera il caso degli elementi misto – ibridi alle tensioni il funzionale libero assume la forma:

$$\Pi_I(\underline{\sigma}, \underline{u}) = -\frac{1}{2} \int_{\beta_e} \underline{\sigma}^T \underline{C}^{-1} \underline{\sigma} dV + I(\underline{\sigma}, \underline{u}), \quad (\text{II.9.4.3})$$

ad un incremento $\underline{\sigma}'$ delle tensioni corrisponde un incremento $\Delta\Pi_I$ del funzionale così fatto.

$$\begin{aligned}\Delta\Pi_I(\underline{\sigma}') &\equiv \Pi_I(\underline{\sigma} + \underline{\sigma}', \underline{u}) - \Pi_I(\underline{\sigma}, \underline{u}) \\ &= I(\underline{\sigma}', \underline{u}) - \frac{1}{2} \int_{\beta_e} (\underline{\sigma} + \underline{\sigma}')^T \underline{C}^{-1} (\underline{\sigma} + \underline{\sigma}') dV + \frac{1}{2} \int_{\beta_e} \underline{\sigma}^T \underline{C}^{-1} \underline{\sigma} dV.\end{aligned}\quad (\text{II.9.4.4})$$

Dal momento che nella (II.9.4.4) i due integrali rappresentano forme quadratiche definite positive si ha che:

$$\Delta\Pi_I(\underline{\sigma}') = 0 \quad \forall \underline{u} \quad \Rightarrow \underline{\sigma}' = \underline{0}, \quad (\text{II.9.4.5})$$

quindi l'elemento è esente da ZEM_β . Se invece si introduce un incremento \underline{u}' del campo di spostamento si ha:

$$\Delta\Pi_I(\underline{u}') \equiv \Pi_I(\underline{\sigma}, \underline{u} + \underline{u}') - \Pi_I(\underline{\sigma}, \underline{u}) = I(\underline{\sigma}, \underline{u}'), \quad (\text{II.9.4.6})$$

dalla quale è facile ricavare la condizione di stabilità che corrisponde alla (II.9.3.1.a):

$$\Delta\Pi_I(\underline{u}') = I(\underline{\sigma}, \underline{u}') = 0 \quad \forall \underline{\sigma} \quad \Rightarrow \underline{u}' = \underline{0}. \quad (\text{II.9.4.7})$$

Introducendo la forma discreta del funzionale nella quale \underline{u} è approssimato da un'interpolazione degli spostamenti nodali \underline{q} ed il campo tensionale è interpolato in base a parametri Lagrangiani $\underline{\beta}$ si ha:

$$\Pi_I(\underline{\beta}, \underline{q}) = \underline{\beta}^T \underline{G} \underline{q} - \frac{1}{2} \underline{\beta}^T \underline{H} \underline{\beta}, \quad (\text{II.9.4.8})$$

per la quale la stabilità (*rank condition*) impone:

$$\underline{\beta}^T \underline{G} \underline{q} = 0 \quad \forall \underline{\beta} \quad \Rightarrow \underline{q} = \underline{0} \quad \rightarrow \underline{G} \underline{q} = \underline{0} \quad \Rightarrow \underline{q} = \underline{0}. \quad (\text{II.9.4.9})$$

Se invece si considera il caso degli elementi misto - ibridi alle deformazioni il funzionale libero assume la forma:

$$\Pi_{II}(\underline{\sigma}, \underline{u}) = \frac{1}{2} \int_{\beta_e} (\underline{D}\underline{u})^T \underline{C}(\underline{D}\underline{u}) dV - L(\underline{\sigma}, \underline{u}). \quad (\text{II.9.4.10})$$

Procedendo analogamente al caso precedente si ha:

$$\begin{aligned}\Delta\Pi_{II}(\underline{u}') &\equiv \Pi_{II}(\underline{\sigma}, \underline{u} + \underline{u}') - \Pi_{II}(\underline{\sigma}, \underline{u}) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\beta_e} [\underline{D}(\underline{u} + \underline{u}')]^T \underline{C}[\underline{D}(\underline{u} + \underline{u}')] dV - \frac{1}{2} \int_{\beta_e} (\underline{D}\underline{u})^T \underline{C}(\underline{D}\underline{u}) dV - L(\underline{\sigma}, \underline{u}'),\end{aligned}\quad (\text{II.9.4.11})$$

dal momento che nella (II.9.4.11) i due integrali rappresentano forme quadratiche definite positive si ha che:

$$\Delta\Pi_{II}(\underline{u}') = 0 \quad \forall \underline{\sigma} \quad \Rightarrow \underline{u}' = \underline{0} \quad (\text{II.9.4.12})$$

che corrisponde alla (II.9.3.1.a) e quindi l'elemento è esente da ZEM_u , e si ha:

$$L(\underline{\sigma}', \underline{u}) = 0 \quad \forall \underline{u} \quad \Rightarrow \underline{\sigma}' = \underline{0}, \quad (\text{II.9.4.13})$$

introducendo anche in questo caso la forma discreta del funzionale si ottiene:

$$\Pi_{II}(\underline{\beta}, \underline{q}) = \frac{1}{2} \underline{q}^T \underline{H} \underline{q} - \underline{q}^T \underline{G} \underline{\beta}, \quad (\text{II.9.4.14})$$

per la quale la stabilità (*rank condition*) impone:

$$\underline{G} \underline{\beta} = \underline{0} \quad \Rightarrow \underline{\beta} = \underline{0}. \quad (\text{II.9.4.15})$$

II.9.5. Determinazione degli *Zero Energy Modes*

Indicando con n_β e n_q rispettivamente il numero dei parametri di tensione\deformazione e il numero dei parametri cinematici dell'elemento, il numero degli eventuali ZEM è pari a:

$$\begin{aligned} n_0 &= n_q - \text{rank}(G_I) \\ n_0 &= n_\beta - \text{rank}(G_{II}) \end{aligned} \quad (\text{II.9.5.1})$$

Le II.9.5.1. corrispondono al caso di elementi ibrido – misti alle tensioni (in cui la matrice G è indicata con G_I) ed alle deformazioni (in cui la matrice G è indicata con G_{II}) rispettivamente.

II.10. Metodi pratici per lo studio della convergenza

Nella pratica la convergenza della soluzione agli elementi finiti standard (agli spostamenti) o anche ibrido – misti viene usualmente testata tramite il *patch test* ideato da Irons [Irons, 1972]. Questo metodo consente di verificare se sono rispettate le condizioni di moto rigido e di stato di deformazione costante per insiemi di elementi di forma qualsiasi e comunque assemblati purché vi sia almeno un nodo della *mesh* interno al dominio che viene discretizzato (Figura II.10.1).

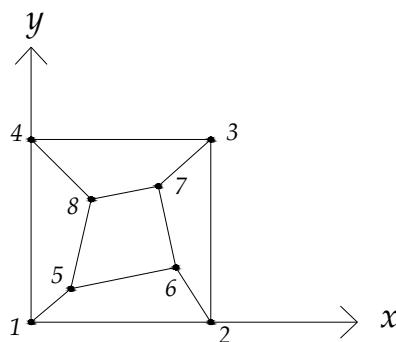


Figura II.10.1: Mesh tipo per *patch test* di Irons.

Un elemento supera il *patch test* se assumendo un campo di spostamento tale da produrre uno stato di deformazione costante e risolvendo il problema in figura si ottiene come risultato uno stato di tensione costante ed uguale a quello teorico.

Se, considerate differenti geometrie, l'elemento supera il *patch test* è garantita la convergenza al risultato esatto all'aumentare del raffinamento della *mesh*.

Bibliografia

- [1] Bathe K.J. 1996. *Finite element procedures in engineering analysis* – Prentice Hall, Englewood Cliffs.
- [2] Bathe K.J. 2001. *The inf-sup condition and its evaluation for mixed finite element methods* – Computers and Structures, **79**: 243-252.
- [3] Brezzi F., Fortin M. 1991. *Mixed and hybrid finite element methods* – Springer Verlag New York.
- [4] Cazzani A., Garusi E., Tralli A., Atluri S. N. 2005. *A four-node hybrid assumed strain finite element for laminated composite plates* – CMC, **2**: 101–116.
- [5] Garusi E., Tralli A. 2001. *A hybrid stress-assumed transition element for solid-to-beam and plate-to-beam connections* – Computers and Structures, **80**: 105-115.
- [6] Irons B.M. Razzaque A. 1972. *Experience with path test for convergence of finite element method* – Mathematical foundations of finite element method (ed. A.K. Aziz) Academic Press, 557-587.
- [7] Oden J.T. 1976. *A mathematical theory of hybrid finite element methods: accuracy, rate of convergence, and criteria for their successful use* – Journal of the Franklin Institute, **302**: 413-427.
- [8] Pian T.H.H. 1964. *Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distributions*. AIAA J. 2-576.
- [9] Pian T.H.H., Wu C.C. 2006. *Hybrid and incompatible finite elements methods* – CRC Press, Broken Sound Parkway, NW.
- [10] Reddy J.N. 1997. *On locking-free shear deformable beam finite elements*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **149**: 113-132.
- [11] Taylor R.L., Beresford P.J., Wilson E.L. 1976. *A non conforming element for stress analysis*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, **10**: 1211-1219.

-
- [12] Wilson E.L., Taylor R.L., Doherty W.P., Ghaboussi J. 1973. *Incompatible displacements models in Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics* – Academic Press, New York, 43–57.
- [13] Wilson E.L., Ibrahimbegovic A. 1990. *Use for incompatible displacement modes for the calculation of element stiffnesses and stresses*. *Finite Elements in Analysis and Design*, 7: 229-241.

Capitolo III

STRUTTURE IN MATERIALE COMPOSITO LAMINATO: ELEMENTI FINITI A PIÙ CAMPI

III.1. Introduzione

Come è ben noto le applicazioni in diversi settori dell'ingegneria di materiali fibro-rinforzati hanno acquistato un'importanza sempre crescente per le loro caratteristiche di leggerezza e robustezza. Di particolare interesse è il caso dei compositi laminati realizzati da più strati di materiale, in genere fibro-rinforzati, caratterizzati da ottime caratteristiche meccaniche connessi tra loro da resine, di norma polimeriche, che costituiscono la connessione tra i *layer* (Figura III.1.1.).

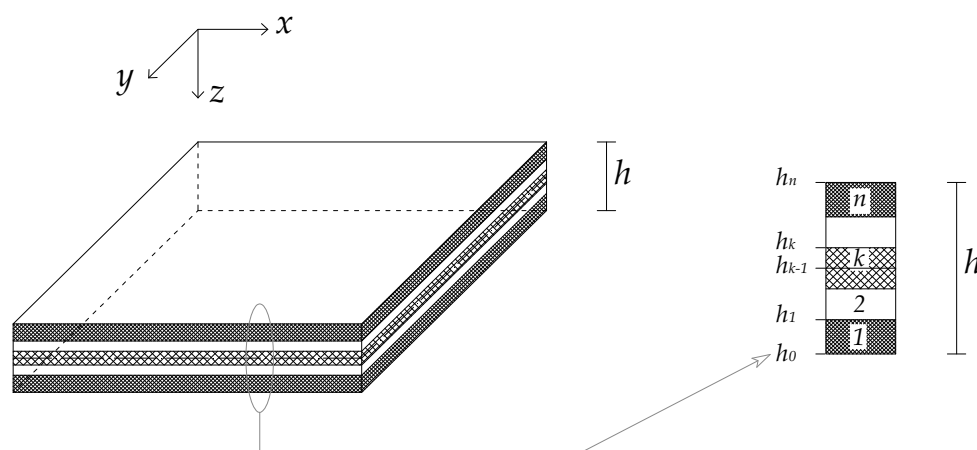


Figura III.1.1: Materiale composito laminato.

In conseguenza della presenza delle fibre il comportamento meccanico del singolo strato non risulta quello di un solido isotropo ma di un materiale afferente alla classe ortotropo o, talvolta, monoclina [Reddy; 2004].

La caratteristica saliente dei laminati, che costituisce la causa del loro successo in più campi dell'ingegneria, è che associano a sezioni di dimensioni modeste, pesi propri bassi e resistenze molto elevate. Si deve però notare che i laminati multistrato sono soggetti a fenomeni di delaminazione e che, anche per sezioni di spessore modesto, non sono trascurabili le deformazioni taglianti.

Nella letteratura tecnica sono presenti diverse formulazioni del problema: più specificatamente le teorie riguardanti i compositi laminati possono essere suddivise in tre principali gruppi [Reddy; 2004]:

- *Equivalent Single Layer (ESL)*: si considera il laminato come un singolo strato equivalente approssimando la deformata della sezione retta secondo i modelli strutturali classici di trave e piastra presentati nel capitolo 1. In particolare si evidenziano:
 - *Classical Lamination Theory (CLT)*: secondo la quale la sezione retta, dopo la deformazione, si mantiene piana e normale all'asse trave o al piano medio della piastra; costituisce pertanto un'estensione della teoria di *Eulero-Bernoulli* per la trave e di *Kirchhoff-Love* per la piastra.
 - *First order Shear Deformation Theory (FSDT)*: secondo la quale la sezione retta, dopo la deformazione, si mantiene piana ma ruota, in virtù dello scorrimento a taglio, rispetto alla normale all'asse trave o al piano medio della piastra; costituisce pertanto un'estensione della teoria di *Timoshenko* per la trave e di *Reissner-Mindlin* per la piastra, [Yang e al.; 1966].
 - *Higher order Shear Deformation Theories (HSDTs)*: Rispetto alla *FSDT* in questo caso viene rimossa anche l'ipotesi secondo la quale la sezione retta, in seguito alla deformazione, si mantiene piana. Si ha quindi un'espansione di ordine superiore dello spostamento trasversale [Chepiga; 1976, Poniatovskii; 1962; Cicala; 1962].
- *Layer-wise Lamination Theories (LLTs)*: Secondo le quali la rappresentazione del campo di spostamento è differente in ogni lamina [Reddy; 1987, Di Sciuva; 1987, Bisegna e Sacco; 1997].

-
- *Elasticità tridimensionale classica*: si considera il continuo tridimensionale anziché un modello strutturale [Pagano; 1970, Liou e Sun; 1987].

Come è noto i materiali compositi laminati sono molto sensibili alla deformabilità tagliante anche per spessori moderati: per questo motivo ci si deve orientare verso teorie che la tengano in conto. Volendo operare nell'insieme delle teorie *ESL* la *CLT* non è in genere adatta, le *HSDTs* sono onerose dal punto di vista computazionale, la *FSDT*, in generale, risulta essere un buon compromesso tra onere computazionale e accuratezza dei risultati [Cen et al., 2002].

Si deve osservare che nella *FSDT* classica le deformazioni trasversali a taglio sono assunte costanti nello spessore e per questo motivo le tensioni a esse associate violano le condizioni di equilibrio ai bordi superiore ed inferiore della trave o della piastra; inoltre il fattore di correzione a taglio deve essere esplicitamente introdotto.

Gli elementi proposti nel seguito sono sviluppati sulla base di una *FSDT modificata* [Cazzani e al., 2005] in modo da non violare le condizioni di equilibrio al contorno e da non richiedere a priori l'introduzione del fattore di correzione a taglio.

Nello specifico le componenti di deformazione parallele all'asse della trave o al piano medio della piastra sono interpolate in modo da risultare lineari nello spessore. Mediante il legame costitutivo si ottengono le corrispondenti componenti dello sforzo nel piano e quindi, in virtù delle equazioni locali di equilibrio, si calcolano per integrazione le componenti di sforzo tangenziale fuori dal piano; da qui si ricavano le relative componenti di deformazione tagliante.

In questo modo, nelle ipotesi dalla *FSDT*, è possibile sviluppare elementi finiti misto – ibridi esenti da fenomeni di *locking* che rispettano le condizioni di equilibrio ai bordi superiore ed inferiore della trave o della piastra, senza la necessità di introdurre a priori il fattore di correzione a taglio.

III.2. Elementi finiti di trave – analisi statica lineare

In questo paragrafo viene sviluppato un elemento finito misto – ibrido a due campi basato sul principio variazionale di Hu-Washizu modificato per travi piane laminate e nelle ipotesi della *FSDT*.

La cinematica, in deformazioni infinitesime e piccoli spostamenti, del generico elemento (Figura III.2.1) si scrive:

$$\begin{cases} s_z(y, z) = u_z(z) + y\varphi(z) \\ s_y(y, z) = u_y(z). \end{cases} \quad (\text{III.2.1})$$

Nella (III.2.1) $u_z(z)$, $u_y(z)$, $\varphi(z)$ sono, rispettivamente, lo spostamento longitudinale e trasversale dell'asse della trave e la rotazione della sezione retta.

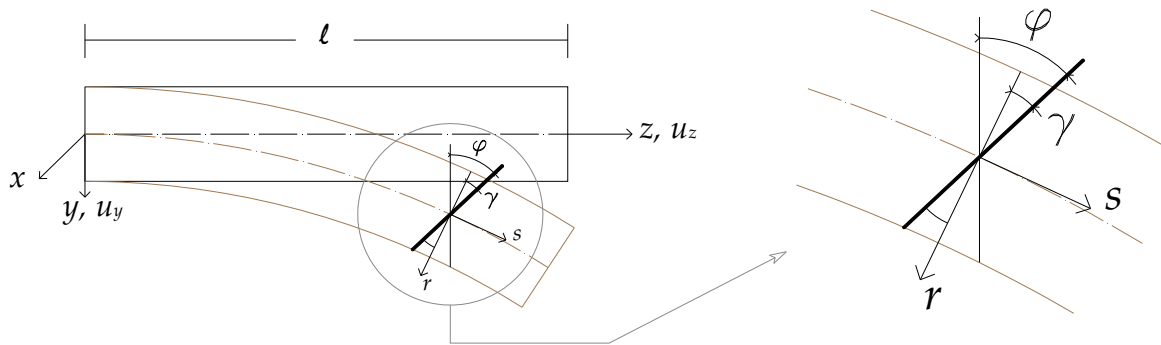


Figura III.2.1: Cinematica della trave in deformazioni infinitesime e spostamenti piccoli.

Le componenti locali di deformazione non identicamente nulle risultano essere:

$$\begin{cases} \varepsilon_{zz} = \frac{\partial s_z}{\partial z} = \frac{du_z(z)}{dz} + y \frac{d\varphi(z)}{dz} = \varepsilon_0(z) + y\kappa(z) & (a) \\ \gamma_{zy} = \frac{\partial s_y}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial y} = \frac{du_y(z)}{dz} + \varphi(z) = \gamma(z) & (b) \end{cases} \quad (\text{III.2.2})$$

dove le componenti generalizzate $\varepsilon_0(z)$, $\kappa(z)$ e $\gamma(z)$ sono rispettivamente la deformazione assiale, la curvatura e lo scorrimento di deformazione media a taglio.

Le equazioni che governano il problema della trave piana di Timoshenko possono essere dedotte dal principio variazionale di Hu-Washizu modificato che in questo caso si scrive:

$$\Pi_{\text{mod}}^{HW} = \Phi(\underline{\varepsilon}) - L_{\text{ext}} - \int_0^{\ell} \left(\underline{S}^T [\underline{\varepsilon} - L(\underline{v})] \right) dz, \quad (\text{III.2.3})$$

nella (III.2.3) $\underline{v} = \{u_z, u_y, \varphi\}^T$ è il vettore degli spostamenti generalizzati, $\underline{\varepsilon} = \{\varepsilon_0, \kappa, \gamma\}^T$ il vettore delle deformazioni generalizzate, $\underline{S} = \{N, M, T\}^T$ il vettore delle corrispondenti azioni interne (rispettivamente: sforzo normale, momento flettente e taglio), Φ è l'energia di deformazione elastica mentre L_{ext} è il lavoro delle forze esterne. Nel termine integrale compare il contributo $[\underline{\varepsilon} - L(\underline{v})]$ che rappresenta le condizioni di compatibilità tra spostamenti e deformazioni.

Quest'ultimo termine in cui compare l'operatore lineare differenziale $L(\underline{v})$ consente di imporre in forma debole, mediante moltiplicatori di Lagrange (\underline{S}), le (III.2.2).

Quindi, nel caso semplice di trave omogenea, il potenziale elastico si scrive:

$$\Phi(\underline{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \int_0^\ell (EA\varepsilon_0^2 + EJ\kappa^2 + GA_s\gamma^2) dz, \quad (III.2.4)$$

dove E , G sono i moduli elastici longitudinale e tangenziale; A e J sono rispettivamente l'area e il momento d'inerzia della sezione retta. Si deve osservare che ancora compare il termine A_s corrispondente all'area di taglio che deve essere assegnata a priori. Per una trave laminata il potenziale elastico nel principio di Hu-Washizu si scrive invece:

$$\Phi(\underline{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \int_0^\ell \sum_{i=1}^n \left(\int_{h_{i-1}}^{h_i} E_i \varepsilon_{zzi}^2 dy + \int_{h_{i-1}}^{h_i} G_i \gamma_{zyi}^2 dy \right) dz, \quad (III.2.5)$$

nell'equazione (III.2.5) E_i , G_i sono i moduli elastici nella i -esima lamina.

Al fine di eliminare il problema dell'introduzione a priori del fattore di correzione a taglio è possibile ottenere le tensioni tangenziali mediante le equazioni locali di equilibrio e quindi passare direttamente all'energia ad esse associata.

Nello specifico se dalla (III.2.2.a) si applica il legame costitutivo, si determina la tensione normale σ_{zzi} e quindi, utilizzando la terza equazione locale di equilibrio, nell'ipotesi di forze di volume nulle, si ottiene per integrazione la tensione tangenziale τ_{zyi} :

$$\begin{aligned} \sigma_{zzi} &= E_i \varepsilon_{zzi} = E_i [\varepsilon_0(z) + y\kappa(z)] \\ \frac{\partial \sigma_{zzi}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zyi}}{\partial y} &= 0 \rightarrow \tau_{zyi} = C + \int_{h_{i-1}}^{h_i} -\frac{\partial \sigma_{zzi}}{\partial z} dy = C + \int_{h_{i-1}}^{h_i} -E_i \left[\frac{\partial \varepsilon_0(z)}{\partial z} + y \frac{\partial \kappa(z)}{\partial z} \right] dy, \end{aligned} \quad (III.2.6)$$

dove C è una costante di integrazione e rappresenta la tensione tangenziale sulla faccia inferiore della lamina e in questo modo si possono rispettare le condizioni di equilibrio al bordo:

$$C = \tau_{zyi}^0 = \sum_{m=1}^{k-1} -\frac{1}{2} (h_m^2 - h_{m-1}^2) \frac{\partial \sigma_{zzi}^m}{\partial z}. \quad (\text{III.2.7})$$

Per determinare la componente di taglio dell'azione interna e l'energia di deformazione ad essa associata si risolve il seguente sistema di equazioni, che identificano, rispettivamente, l'equivalenza statica e il bilancio energetico:

$$\begin{cases} T = \int_A \tau_{zyi} dA \\ \frac{1}{2} G A_s \gamma^2 = \frac{1}{2} \int_A \frac{\tau_{zyi}^2}{G_i} dA. \end{cases} \quad (\text{III.2.8})$$

Il termine del lavoro esterno nell'equazione (III.2.3) si scrive invece:

$$L_{ext} = \int_0^\ell (q_z u_z + q_y u_y + m\varphi) dz, \quad (\text{III.2.9})$$

nella (III.2.9) q_z , q_y e m sono rispettivamente le forze distribuite nelle direzioni parallela e trasversale all'asse della trave e le coppie distribuite esterne applicate.

Infine l'ultimo termine, che costituisce il vincolo di compatibilità tra deformazioni e spostamenti, nell'equazione (III.2.3) si scrive:

$$\int_0^\ell (\underline{S}^T [\underline{\varepsilon} - L(\underline{v})]) dz = \int_0^\ell \left[N \left(\varepsilon_0 - \frac{du_z}{dz} \right) + M \left(\kappa - \frac{d\varphi}{dz} \right) + T \left(\gamma - \frac{du_y}{dz} - \varphi \right) \right] dz. \quad (\text{III.2.10})$$

III.2.1. Elemento misto – ibrido ottimale a due nodi

Per ottenere un elemento finito misto – ibrido *ottimale* la relazione (II.7.2) diventa:

$$n_\beta = n_q - n_r. \quad (\text{III.2.1.1})$$

Nella (III.2.1.1) n_β , n_q e n_r sono rispettivamente il numero dei parametri di deformazione e il numero dei parametri cinematici (legati ai parametri cinematici) dell'elemento e di moti rigidi. In questa ipotesi i campi delle componenti generalizzate di deformazione sono interpolati come segue:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \beta_1 \\ \kappa &= \beta_2 + z\beta_3. \end{aligned} \quad (\text{III.2.1.2})$$

A livello locale le deformazioni normali e le corrispettive tensioni, dedotte mediante le equazioni costitutive si scrivono, nel caso semplice della trave omogenea:

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_0 + y\kappa = \beta_1 + y(\beta_2 + z\beta_3) \rightarrow \sigma_{zz} = E\varepsilon_{zz} = E(\beta_1 + y(\beta_2 + z\beta_3)), \quad (\text{III.2.1.3})$$

in virtù dell'equazione (III.2.6) si può scrivere:

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0 \rightarrow \tau_{zy} = C + \int_{-h/2}^y -\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dy = \int_{-h/2}^y -E(y\beta_3) dy, \quad (\text{III.2.1.4})$$

quindi, applicando le (III.2.8), si ottiene:

$$\begin{cases} T = \int_A \tau_{zyi} dA = EJ\beta_3 \\ \frac{1}{2}GA_s\gamma^2 = \frac{1}{2} \int_A \frac{\tau_{zyi}^2}{G_i} dA = \frac{bh^5}{120} \frac{E^2}{G} \beta_3^2. \end{cases} \quad (\text{III.2.1.5})$$

I campi di spostamento sono invece modellati con le usuali funzioni lineari di interpolazione per elementi isoparametrici Lagrangiani a 2 nodi (Figura III.2.1.1).

$$\begin{cases} u_z = L_{a1}u_{z1} + L_{a2}u_{z2} \\ u_y = L_{a1}u_{y1} + L_{a2}u_{y2} \\ \varphi = L_{a1}\varphi_1 + L_{a2}\varphi_2 \end{cases} \quad L_{a1} = \frac{(1-\xi)}{2}; \quad L_{a2} = \frac{(1+\xi)}{2}. \quad (\text{III.2.1.6})$$

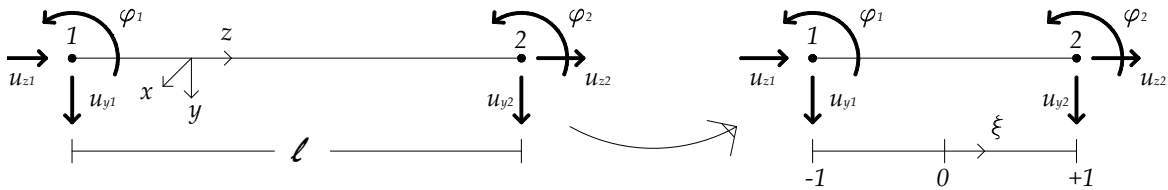


Figura II.2.1.1: Modello agli elementi finiti per la trave di Timoshenko.

E' quindi possibile discretizzare il funzionale di Hu-Washizu modificato e scrivere:

$$\Pi_{\text{mod}}^{HW} = -\frac{1}{2} \underline{\beta}^T \underline{\underline{H}}_{\beta\beta} \underline{\beta} + \underline{\beta}^T \underline{\underline{G}} \underline{q} - \underline{\underline{Q}}^T \underline{q}, \quad (\text{III.2.1.7})$$

dove $\underline{q} = [u_{z1}, u_{y1}, \varphi_1, u_{z2}, u_{y2}, \varphi_2]$ rappresenta il vettore degli spostamenti nodali e

$\underline{\beta} = [\beta_1, \beta_2, \beta_3]$ il vettore dei parametri di deformazione.

Nel caso semplice della trave omogenea i termini di (III.2.1.7) sono rispettivamente:

$$\begin{aligned} \underline{\beta}^T \underline{\underline{H}}_{\beta\beta} \underline{\beta} &= \int_0^\ell \left[EA\beta_1^2 + EJ(\beta_2 + z\beta_3)^2 + \frac{bh^5}{120} \frac{E^2}{G} \beta_3^2 \right] dz, \\ \underline{\beta}^T \underline{\underline{G}} \underline{q} &= \int_0^\ell \left[EA\beta_1 \left(\frac{du_z}{dz} \right) + EJ(\beta_2 + z\beta_3) \left(\frac{d\varphi}{dz} \right) + EJ\beta_3 \left(\frac{du_y}{dz} + \varphi \right) \right] dz, \\ \underline{\underline{Q}}^T \underline{q} &= \int_0^\ell (q_z u_z + q_y u_y + m\varphi) dz. \end{aligned} \quad (\text{III.2.1.8})$$

Le condizioni di stazionarietà rispetto ai parametri di deformazione $\underline{\beta}$ e a quelli cinematici \underline{q} consentono di determinare le equazioni di compatibilità e di equilibrio:

$$\begin{cases} -\underline{H}\underline{\beta} + \underline{G}\underline{q} = \underline{0} \\ \underline{G}^T \underline{\beta} = \underline{Q} \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} -\underline{H} & \underline{G} \\ \underline{G}^T & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\beta} \\ \underline{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{Q} \end{bmatrix}. \quad (\text{III.2.1.9})$$

Come riportato in (II.4.7), condensando staticamente i parametri $\underline{\beta}$, si determina la matrice di rigidezza del singolo elemento finito:

$$\begin{cases} \underline{\beta} = \underline{H}^{-1} \underline{G}\underline{q} \\ \underline{G}^T \underline{H}^{-1} \underline{G}\underline{q} = \underline{Q} \rightarrow \underline{K}_e \underline{q} = \underline{Q}. \end{cases} \quad (\text{III.2.1.10})$$

III.2.2. Elemento misto – ibrido ottimale a tre nodi

Se si considera sempre il caso di elementi *ottimali* i parametri di deformazione che si possono utilizzare sono in questo caso sei. Si sceglie un'interpolazione dei campi delle componenti generalizzate di deformazione di tipo lineare per la parte assiale e cubica per la curvatura:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \beta_1 + z\beta_2 \\ \kappa &= \beta_3 + z\beta_4 + z^2\beta_5 + z^3\beta_6. \end{aligned} \quad (\text{III.2.2.1})$$

Procedendo analogamente a quanto illustrato in (III.2.1) le tensioni normali, sempre nel caso semplice della trave omogenea, si scrivono:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz} &= \varepsilon_0 + y\kappa = (\beta_1 + z\beta_2) + y(\beta_3 + z\beta_4 + z^2\beta_5 + z^3\beta_6) \\ \rightarrow \sigma_{zz} &= E\varepsilon_{zz} = E\left((\beta_1 + z\beta_2) + y(\beta_3 + z\beta_4 + z^2\beta_5 + z^3\beta_6)\right)' \end{aligned} \quad (\text{III.2.2.2})$$

Se, al fine di rispettare le equazioni di equilibrio in sede indefinita in termini di risultante, si trascura il contributo fornito da β_2 , la (III.2.6) diventa:

$$\tau_{zy} = C + \int_{-h/2}^y -\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dy = \int_{-h/2}^y -E\left[y(\beta_4 + 2z\beta_5 + 3z^2\beta_6)\right] dy, \quad (\text{III.2.2.3})$$

applicando le (III.2.8) si ha:

$$\begin{cases} T = \int_A \tau_{zy} dA = EJ(\beta_4 + 2z\beta_5 + 3z^2\beta_6) \\ \frac{1}{2}GA_s\gamma^2 = \frac{1}{2} \int_A \frac{\tau_{zy}^2}{G} dA = \frac{bh^5}{120} \frac{E^2}{G} (\beta_4 + 2z\beta_5 + 3z^2\beta_6)^2. \end{cases} \quad (\text{III.2.2.4})$$

I campi di spostamento sono modellati con le usuali funzioni paraboliche di interpolazione per elementi isoparametrici Lagrangiani a 3 nodi (Figura III.2.2.1).

$$\begin{cases} u_z = L_{a1}u_{z1} + L_{a2}u_{z2} + L_{a3}u_{z3} \\ u_y = L_{a1}u_{y1} + L_{a2}u_{y2} + L_{a3}u_{y3} \\ \varphi = L_{a1}\varphi_1 + L_{a2}\varphi_2 + L_{a3}\varphi_3 \end{cases} \quad L_{a1} = \frac{-\xi(1-\xi)}{2}; \quad L_{a2} = (1-\xi^2); \quad L_{a3} = \frac{\xi(1+\xi)}{2}. \quad (\text{III.2.2.5})$$

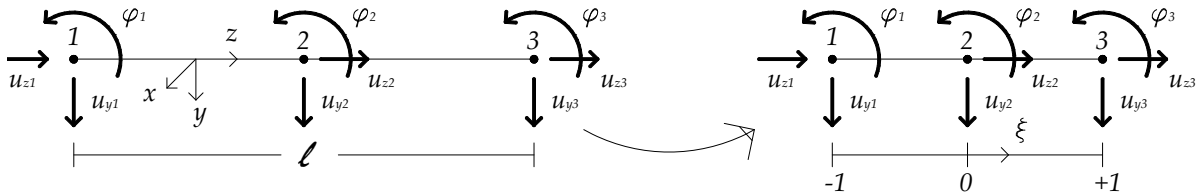


Figura II.2.2.1: Modello agli elementi finiti per la trave di Timoshenko.

Se si procede alla discretizzazione del funzionale di Hu-Washizu modificato si ha:

$$\Pi_{\text{mod}}^{HW} = -\frac{1}{2} \underline{\beta}^T \underline{H}_{\beta\beta} \underline{\beta} + \underline{\beta}^T \underline{G} \underline{q} - \underline{Q}^T \underline{q}. \quad (\text{III.2.2.6})$$

Nella (III.2.2.6) $\underline{q} = [u_{z1}, u_{y1}, \varphi_1, u_{z2}, u_{y2}, \varphi_2, u_{z3}, u_{y3}, \varphi_3]$ rappresenta il vettore degli spostamenti nodali mentre $\underline{\beta} = [\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6]$ il vettore dei parametri di deformazione. Nel caso semplice della trave omogenea i termini di (III.2.2.6) sono rispettivamente:

$$\begin{aligned} \underline{\beta}^T \underline{H}_{\beta\beta} \underline{\beta} &= z \int_0^\ell \left[EA(\beta_1 + z\beta_2)^2 + EJ(\beta_3 + z\beta_4 + z^2\beta_5 + z^3\beta_6)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{bh^5}{120} \frac{E^2}{G} (\beta_4 + 2z\beta_5 + 3z^2\beta_6)^2 \right] dz \\ \underline{\beta}^T \underline{G} \underline{q} &= \int_0^\ell \left[EA(\beta_1 + z\beta_2) \left(\frac{du_z}{dz} \right) + EJ(\beta_3 + z\beta_4 + z^2\beta_5 + z^3\beta_6) \left(\frac{d\varphi}{dz} \right) \right. \\ &\quad \left. + EJ(\beta_4 + 2z\beta_5 + 3z^2\beta_6) \left(\frac{du_y}{dz} + \varphi \right) \right] dz \\ \underline{Q}^T \underline{q} &= \int_0^\ell (q_z u_z + q_y u_y + m\varphi) dz \end{aligned} \quad (\text{III.2.2.7})$$

Imponendo la stazionarietà rispetto ai parametri di deformazione $\underline{\beta}$ e a quelli cinematici \underline{q} e procedendo, come sempre con la condensazione statica dei parametri $\underline{\beta}$ si determina la matrice di rigidità del singolo elemento finito:

$$\begin{cases} \underline{\beta} = \underline{H}^{-1} \underline{G} \underline{q} \\ \underline{G}^T \underline{H}^{-1} \underline{G} \underline{q} = \underline{Q} \rightarrow \underline{K}_e \underline{q} = \underline{Q} \end{cases} \quad (\text{III.2.2.8})$$

III.2.3. Test numerici per travi omogenee

• Mensola omogenea caricata all'estremo libero (Figura III.2.3.1). Di seguito si ripropone il test presentato nel paragrafo (I.4.5) dove si osserva l'assenza di *shear-locking*. In Tabella III.2.3.1 e in Tabella III.2.3.2 si riportano rispettivamente i risultati normalizzati rispetto alla soluzione analitica [si veda *Corradi, 1992*] nel caso di 1 elemento ottimale a 2 e 3 nodi con rapporto s/L variabile.

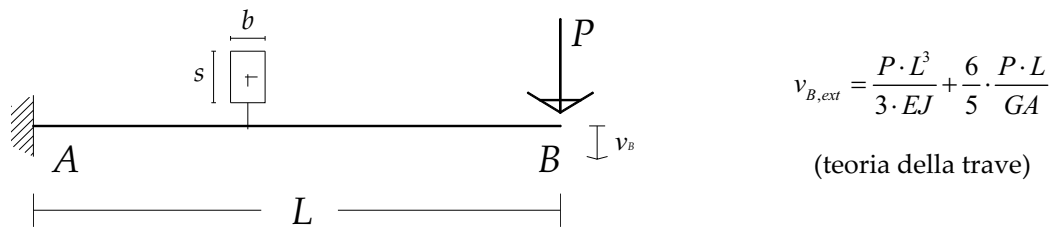


Figura III.2.3.1: Trave a mensola con carico concentrato.

b [cm]	s [cm]	L [cm]	s/L	# di elem.	# di nodi	v/v_{ext}	err. %
20	200	200	1	1	2	1.0000	0.00
20	1	200	1/200	1	2	1.0000	0.00

Tabella III.2.3.1: Spostamenti trasversali per trave a mensola al variare di s/L . Elementi MH a 2 nodi.

b [cm]	s [cm]	L [cm]	s/L	# di elem.	# di nodi	v/v_{ext}	err. %
20	200	200	1	1	3	1.0000	0.00
20	1	200	1/200	1	3	1.0000	0.00

Tabella III.2.3.2: Spostamenti trasversali per trave a mensola al variare di s/L . Elementi MH a 3 nodi.

In Tabella III.2.3.3 e III.2.3.4 si riportano rispettivamente in forma adimensionale i test di convergenza alla soluzione analitica al raffittire della *mesh* nei due casi di elemento a 2 nodi e a 3 nodi con rapporto s/L pari ad 1 e 1/200.

s/L	# di elem.	2-nodi Lagrangiano	err. %	3-nodi Lagrangiano	err. %
1	1	1.0000	0.00	1.0000	0.00
	16	1.0000	0.00	1.0000	0.00

Tabella III.2.3.3: Convergenza per la trave a mensola modellata con elementi misto-ibridi a 2 e 3 nodi.

s/L	# di elem.	2-nodi Lagrangiano	err. %	3-nodi Lagrangiano	err. %
1/200	1	1.0000	0.00	1.0000	0.00
	16	1.0000	0.00	1.0000	0.00

Tabella III.2.3.4: Convergenza per la trave a mensola modellata con elementi misto-ibridi a 2 e 3 nodi.

In Figura III.2.3.3 si riporta l'andamento delle tensioni tangenziali in 3 sezioni di interesse (Figura III.2.3.2) nei casi di risultati forniti dal programma FEM *Straus7* in

cui la mensola di Figura III.2.3.1 è modellata con elementi piani di tensione e il carico viene applicato con distribuzione alla *Jourawsky* (Figura III.2.3.3.a) e forniti dagli elementi finiti di trave riportati ai paragrafi (III.2.1) e (III.2.2) (Figura III.2.3.3.b).

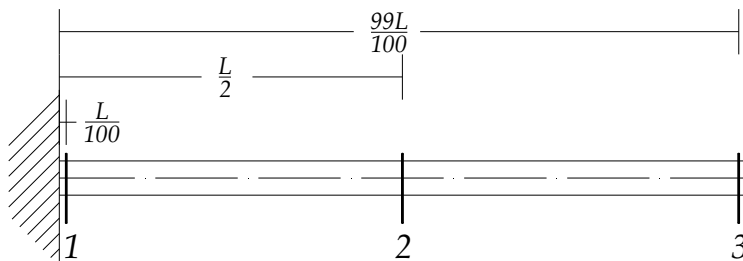


Figura III.2.3.2: Sezioni di interesse.

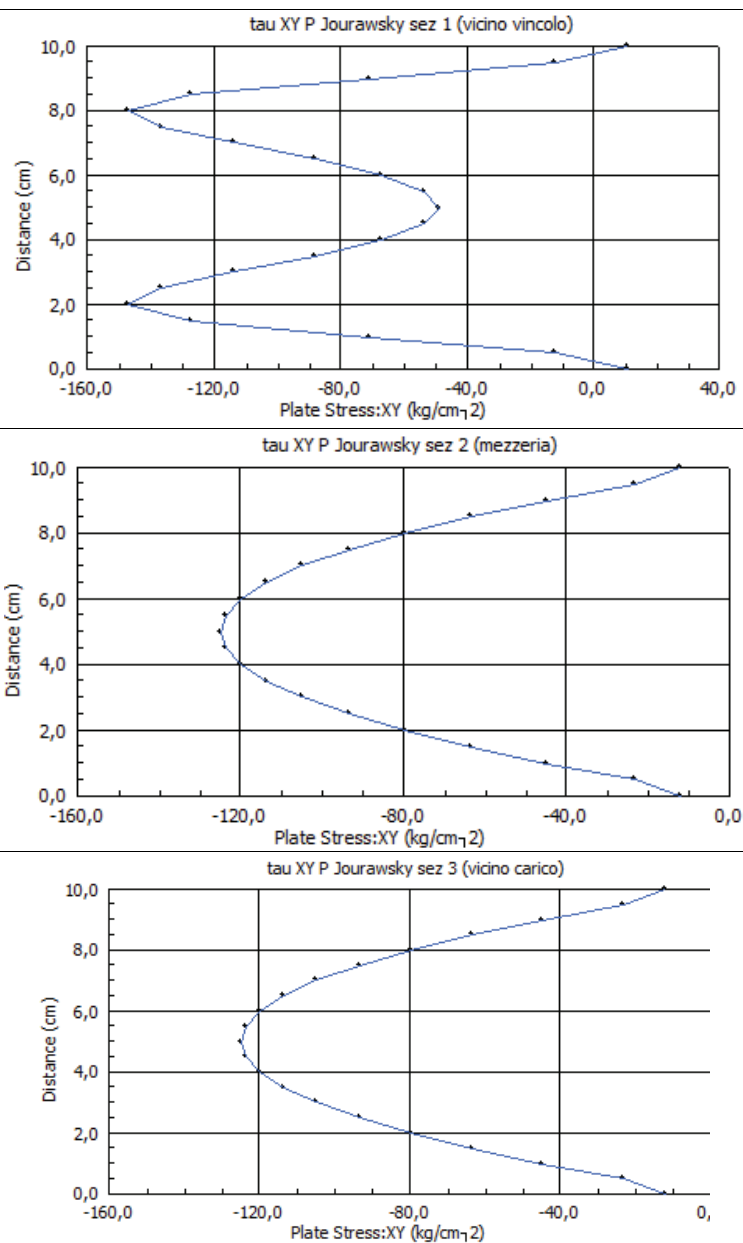


Figura III.2.3.3.a: Andamento delle tensioni tangenziali sulla sezione. Modello *Straus7* con carico sulla sezione d'estremo libero inserito con distribuzione alla *Jourawsky*.

2 e 3 nodi Lagrangiano

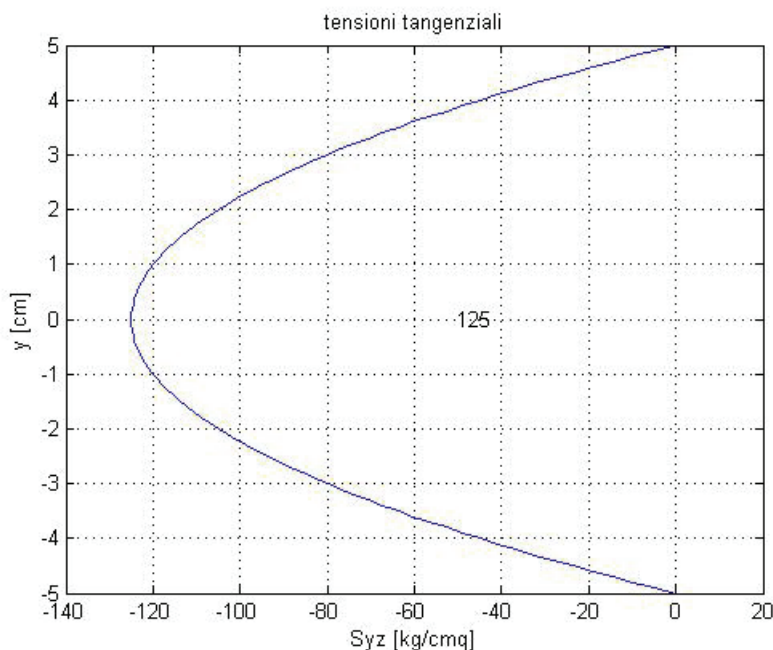


Figura III.2.3.3.b: Andamento delle tensioni tangenziali sulla sezione. Modello beam a 2 nodi e 3 nodi con carico concentrato sulla sezione d'estremo libero.

Si deve sottolineare che l'andamento delle tensioni taglianti, è in buon accordo con i risultati forniti dal programma *Straus7* [†]. Il modello di trave ibrido – misto sviluppato è in grado di fornire i risultati ottenuti in via analitica dalla risoluzione degli specifici problemi del *De Saint Venant* e quindi non è in grado di cogliere ciò che avviene nelle zone in prossimità di carichi concentrati o dei vincoli. Questi effetti locali si possono evidenziare solo con un'analisi bidimensionale o tridimensionale. Al contrario, come evidenziato in Figura III.2.3.3.b gli elementi misto – ibridi di trave riproducono esattamente la condizione di superficie laterale scarica ($\tau_{yz} = 0$) che, in una modellazione con elementi finiti piani bidimensionali (agli spostamenti), può solo essere imposta in forma debole e quindi essere verificata incrementando il raffinamento della *mesh*.

† Straus7 ver. 2.3.6: Codice agli elementi finiti commerciale, sviluppato e distribuito da Strand7.

- Mensola omogenea caricata uniformemente (Figura III.2.3.4). Nelle Tabelle III.2.3.4 e III.2.3.5 si riportano rispettivamente i *test* di convergenza normalizzati rispetto alla soluzione analitica [si veda *Corradi, 1992*] per *mesh* progressivamente più fitte nei due casi di elemento a 2 nodi e a 3 nodi con rapporto s/L pari ad 1 e 1/200.

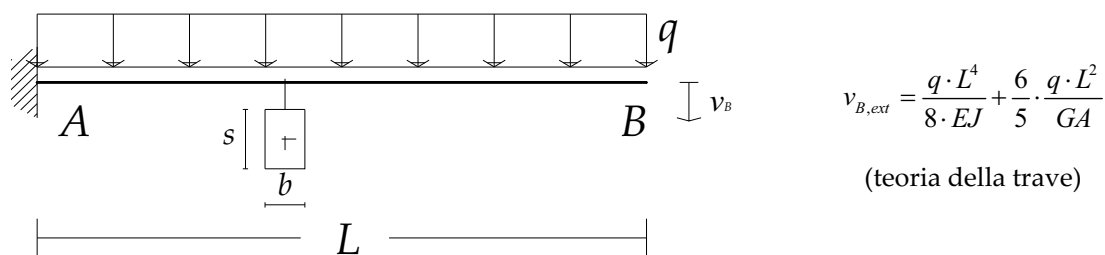


Figura III.2.3.4: Trave a mensola con carico uniformemente distribuito.

s/L	# di elem.	2-nodi Lagrangiano	err. %	3-nodi Lagrangiano	err. %
1	1	1.1634	16.34	1.0000	0.00
	2	1.0408	4.08	1.0000	0.00
	4	1.0102	1.02	1.0000	0.00
	8	1.0026	0.26	1.0000	0.00
	16	1.0006	0.06	1.0000	0.00

Tabella III.2.3.5: Convergenza per la trave a mensola modellata con elementi misto-ibridi a 2 e 3 nodi.

s/L	# di elem.	2-nodi Lagrangiano	err. %	3-nodi Lagrangiano	err. %
1/200	1	1.3333	33.33	1.0000	0.00
	2	1.0833	8.33	1.0000	0.00
	4	1.0208	2.08	1.0000	0.00
	8	1.0052	0.52	1.0000	0.00
	16	1.0013	0.13	1.0000	0.00

Tabella III.2.3.6: Convergenza per la trave a mensola modellata con elementi misto-ibridi a 2 e 3 nodi.

In Figura III.2.3.5.a\b si riportano rispettivamente le curve di convergenza in termini di spostamento trasversale adimensionale per i due elementi a 2 e 3 nodi.

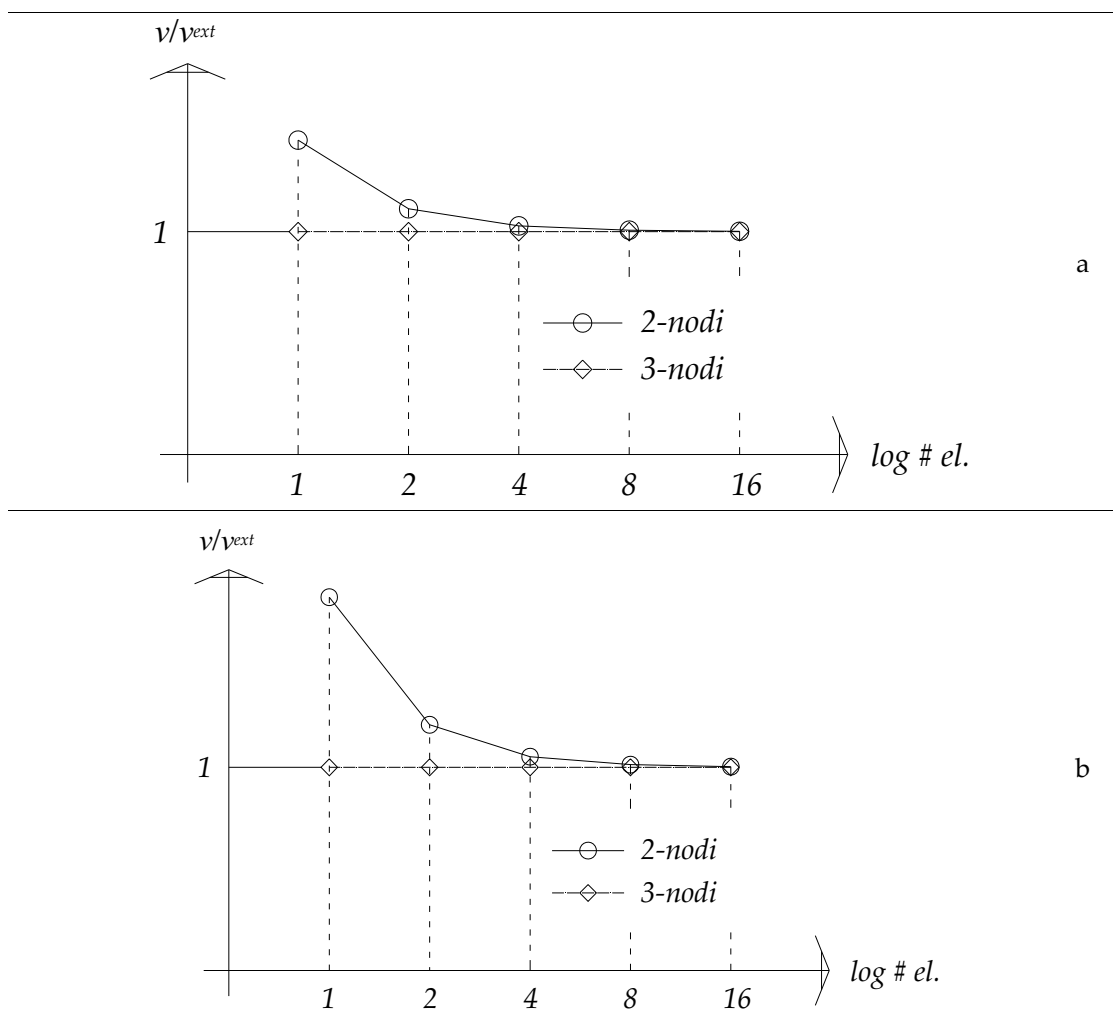
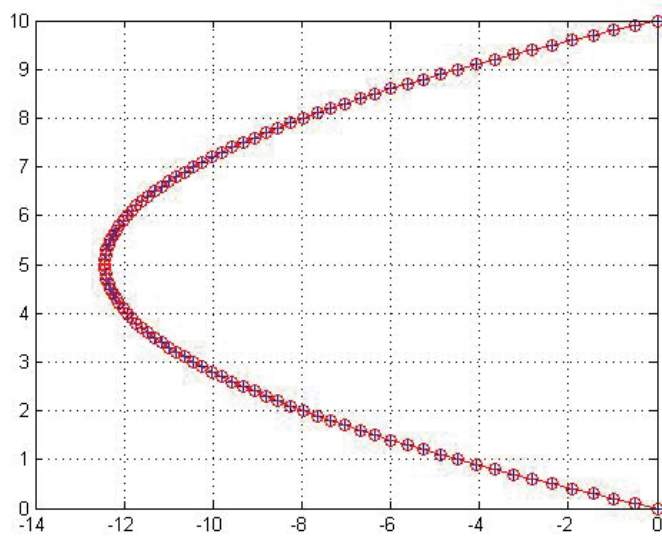
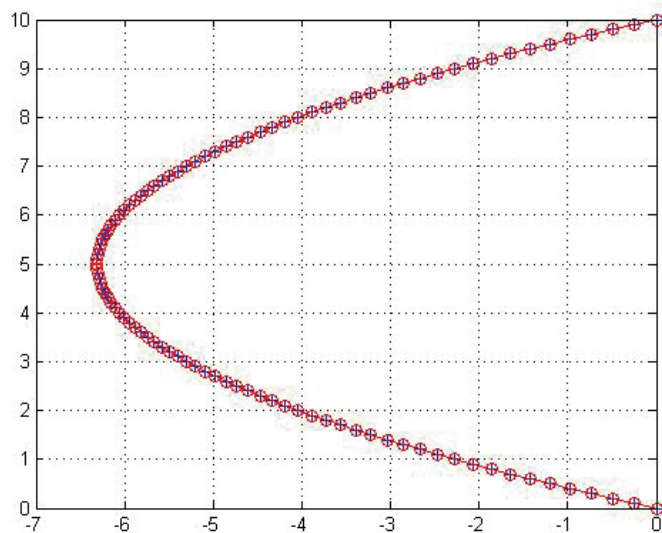


Figura III.2.3.5: Curve di convergenza in spostamento. a) $s/L=1$; b) $s/L=1/200$.

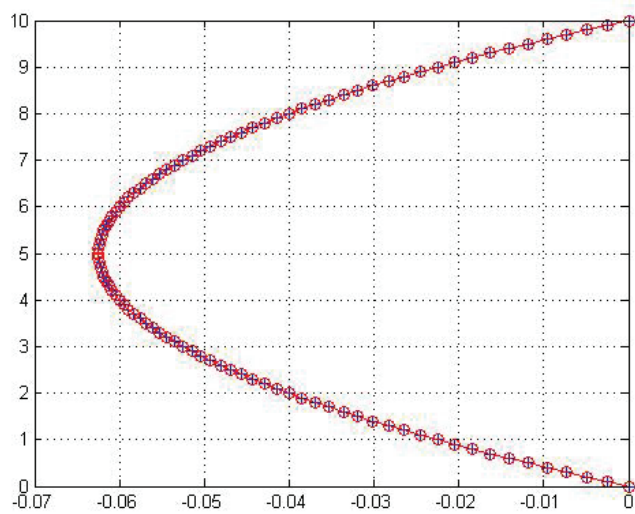
In Figura III.2.3.6.a-b-c si riporta la distribuzione dello stato tensionale tagliante nelle sezioni individuate in Figura III.2.3.2 per i due elementi a 2 e 3 nodi. Si noti come le tensioni tangenziali siano uguali per i due differenti elementi proposti e che nelle tre sezioni di controllo l'entità delle tensioni sia proporzionalmente decrescente mano a mano che ci si allontana dal vincolo. Ancora una volta si osserva che i modelli non sono in grado di cogliere gli effetti locali che contraddistinguono le zone in prossimità dei vincoli. Risultati analoghi si evidenziano nel caso di travi appoggiate soggette a carichi concentrati o distribuiti.



a



b



c

Figura III.2.3.6: Andamento delle tensioni tangenziali sulle sezioni di controllo. Modello beam a 2 nodi (+) e 3 nodi (o) con carico uniformemente distribuito. Mesh composta da 100 elementi finiti.

III.2.4. Test numerici per travi laminate

Si considerano ora travi laminate multistrato e in particolare il caso della trave a mensola riportata in Figura I.2.4.1 per diversi valori del rapporto s/L e per tre differenti schemi di orditura delle lamine $0^\circ, 90^\circ, 0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ (0,90)_s$ [Reddy, 2004].

Parametri meccanici del materiale:

$$\frac{E_x}{E_y} = 25; \quad G_{xy} = G_{xz} = 0.5E_y; \quad G_{yz} = 0.2E_y; \quad \nu_{xy} = 0.25 .$$

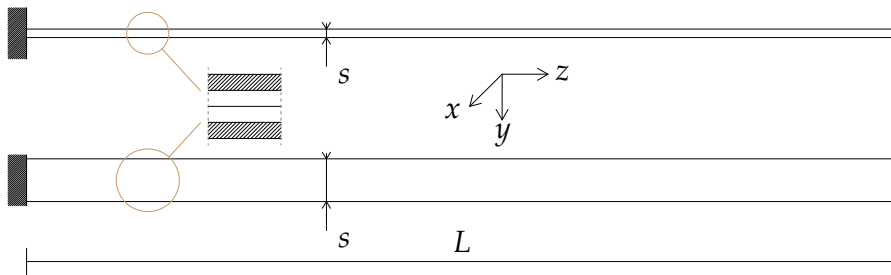
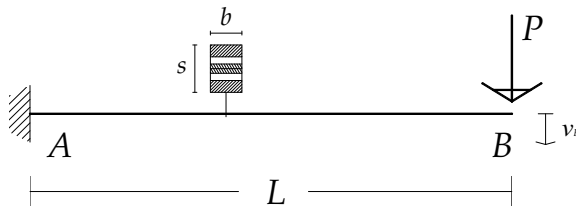


Figura III.2.4.1: Trave appoggiata con carico uniformemente distribuito.

- Mensola laminata caricata all'estremo libero (Figura III.2.4.2). In Tabella III.2.4.1 e in Tabella III.2.4.2 si riportano rispettivamente i *test* di convergenza normalizzati rispetto alla soluzione analitica [Reddy, 2004] al raffittire della *mesh* per elementi a 2 e 3 nodi con rapporto s/L pari ad $1/20$ e $1/100$.



$$v_{B,ext} = \frac{P \cdot b \cdot L^3}{3 \cdot E_{zz}^b J} + k_T \cdot \frac{P \cdot b \cdot L}{G_{zz}^b A}$$

[Reddy, 2004]

Figura III.2.4.2: Trave a mensola laminata con carico concentrato. Si osservi che $E_{zz}^b = 12/(s^3 D_{11}^*)$ e $G_{zz}^b = 1/(s A_{55}^*)$ in cui D_{11}^* e A_{55}^* sono funzione delle caratteristiche meccaniche del laminato.

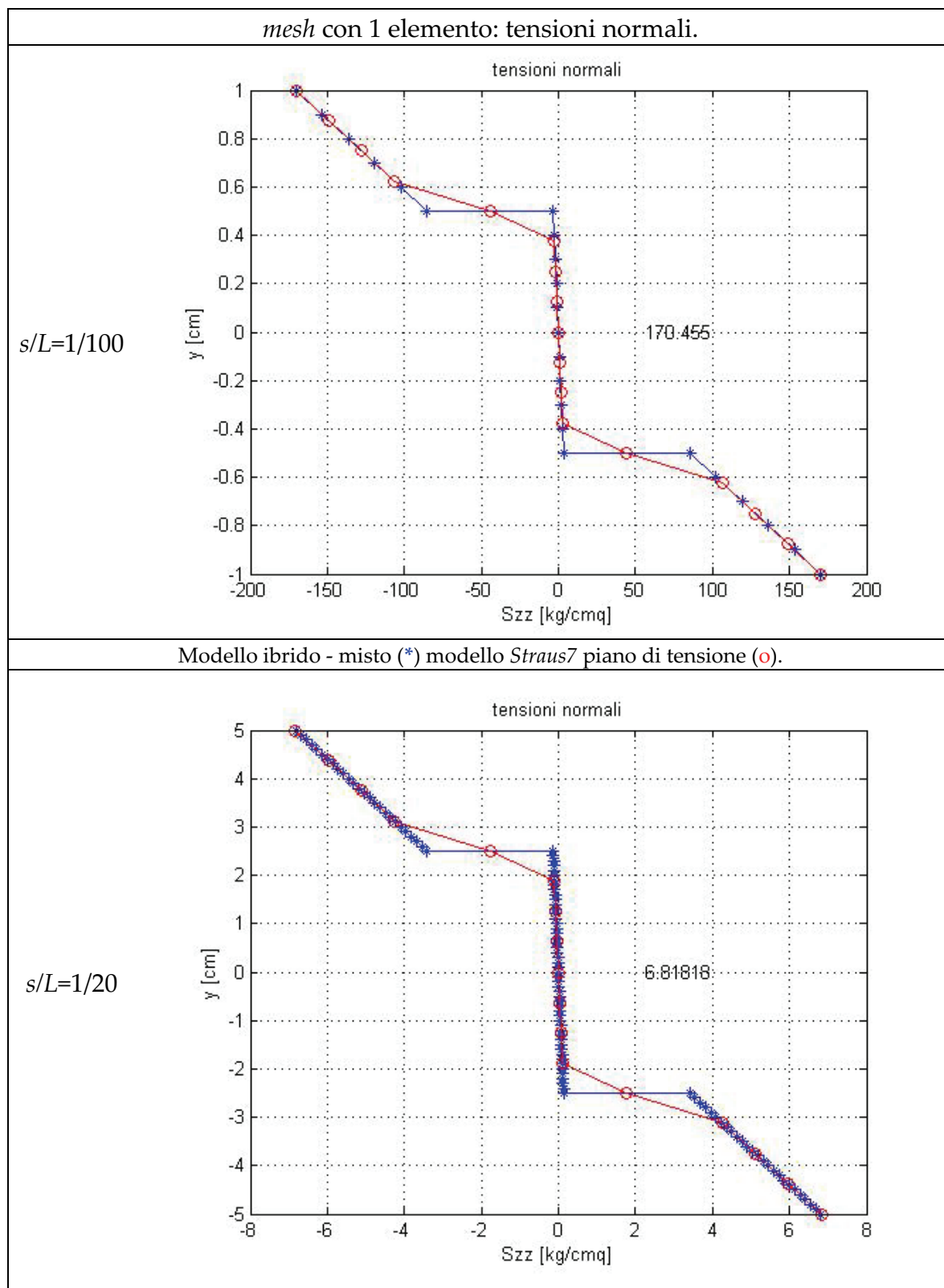
laminato	0	90	$(0/90)_s$	0	90	$(0/90)_s$
# di el.	2-nodi Lagrangiano			3-nodi Lagrangiano		
1	1.0041	0.9983	1.0051	1.0000	0.9998	1.0011
16	1.0041	0.9983	1.0051	1.0000	0.9998	1.0011

Tabella III.2.4.1: Convergenza per la trave a mensola modellata con elementi misto -ibridi a 2 e 3 nodi e rapporto $s/L=1/20$. Valori normalizzati secondo la relazione $\hat{v} = v_{max} (100E_2 s^3 / PL^3)$.

laminato	0	90	$(0/90)_s$	0	90	$(0/90)_s$
# di el.	2-nodi Lagrangiano			3-nodi Lagrangiano		
1	1.0008	1.0001	1.0021	1.0002	1.0001	1.0006
16	1.0008	1.0001	1.0021	1.0002	1.0001	1.0006

Tabella III.2.4.1: Convergenza per la trave a mensola modellata con elementi misto -ibridi a 2 e 3 nodi e rapporto $s/L=1/100$. Valori normalizzati secondo la relazione $\hat{v} = v_{max} (100E_2 s^3 / PL^3)$.

In Figura III.2.4.2 sono riportati rispettivamente l'andamento delle tensioni normali (III.2.4.2.a,b) e tangenziali (III.2.4.2.c,d) sulla sezione di mezzeria nei due casi di trave snella ($s/L=1/100$) e moderatamente spessa ($s/L=1/20$) modellata con 1 solo elemento a 2 o a 3 nodi e con schema di laminazione $(0/90)_s$.



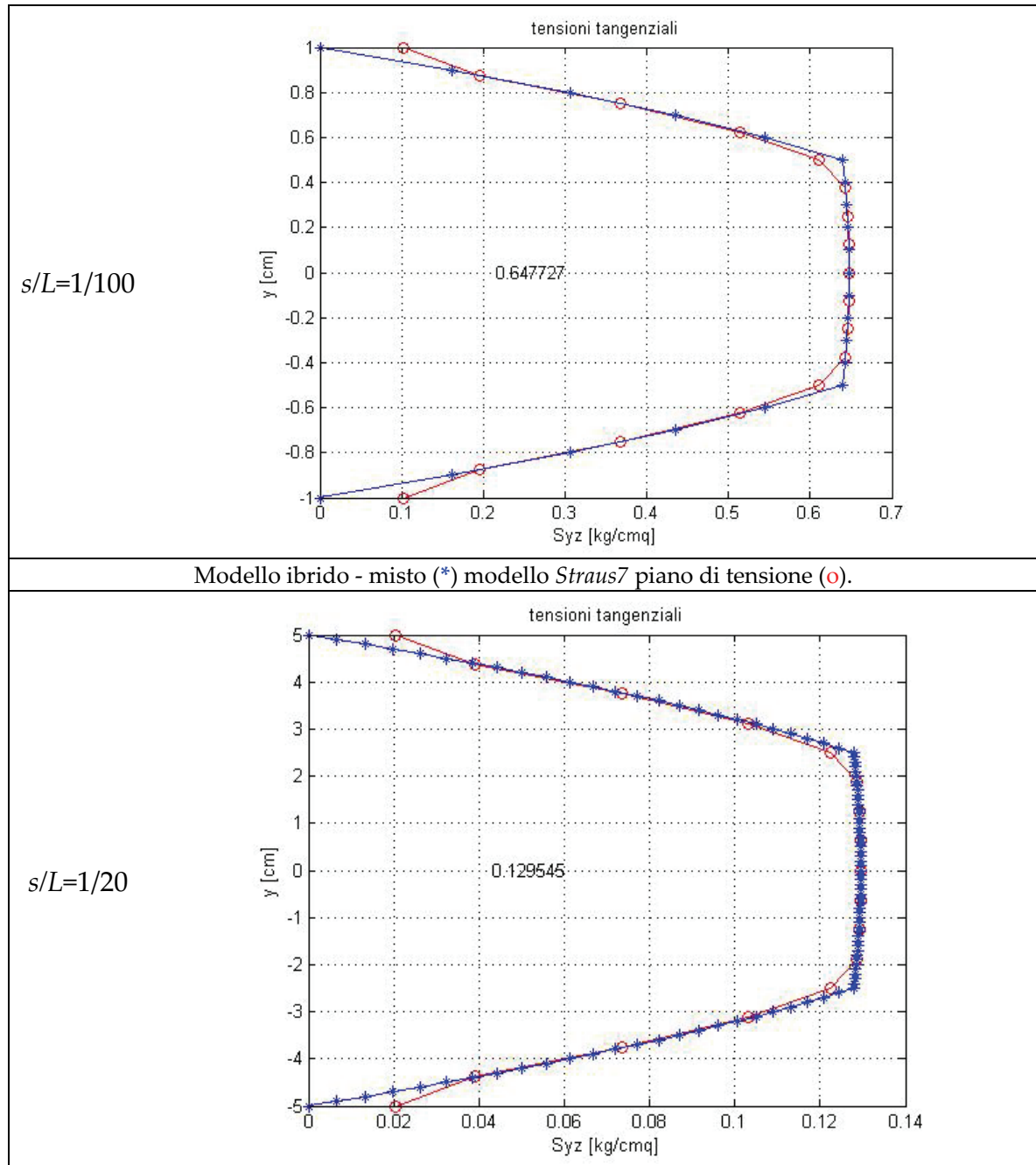


Figura III.2.4.2.: Tensioni normali (a,b) e tensioni tangenziali (c,d) sulla sezione.

Si osserva che dall'analisi comparativa con il programma *Straus7* [†], in cui si sono utilizzati elementi piani di tensione, i modelli misti – ibridi a 2 e a 3 nodi proposti consentono di cogliere in modo accurato l'andamento delle tensioni sulla sezione. Oltre alla condizione di superficie laterale scarica ($\tau_{yz} = 0$) i modelli misti – ibridi proposti, al contrario degli elementi finiti piani bidimensionali (agli spostamenti), riproducono esattamente la variazione dei moduli elastici che si ha con il passaggio di *layer*.

† *Straus7* ver. 2.3.6: Codice agli elementi finiti commerciale, sviluppato e distribuito da Strand7.

- Mensola laminata caricata uniformemente (Figura III.2.4.3). In Tabella III.2.4.3 e in Tabella III.2.4.4 si riportano rispettivamente i *test* di convergenza normalizzati rispetto alla soluzione analitica [Reddy, 2004] al raffinare della *mesh* per elementi a 2 e 3 nodi con rapporto s/L pari ad $1/20$ e $1/100$.

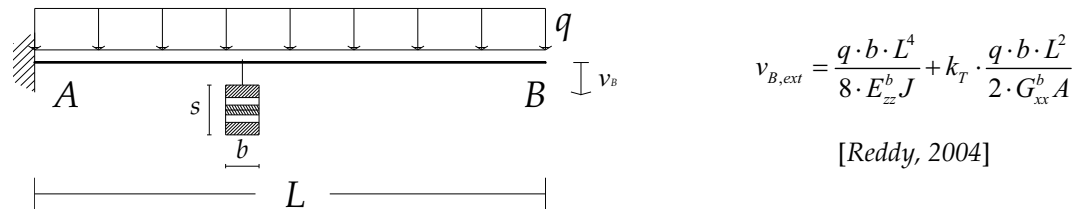


Figura III.2.4.3: Trave a mensola laminata con carico uniformemente distribuito.

laminato	0	90	(0/90) _s	0	90	(0/90) _s
# di el.	2-nodi Lagrangiano			3-nodi Lagrangiano		
1	1.3175	1.3284	1.3214	1.1145	1.1237	1.1198
2	1.0794	1.0796	1.0856	1.0586	1.0591	1.0604
4	1.0198	1.0177	1.0267	1.0078	1.0072	1.0087
8	1.0050	1.0022	1.0119	1.0007	1.0002	1.0023
16	1.0012	1.0002	1.0082	1.0000	1.0000	1.0007

Tabella III.2.4.3: Convergenza per la trave a mensola modellata con elementi misto -ibridi a 2 e 3 nodi e rapporto $s/L=1/20$. Valori normalizzati secondo la relazione $\hat{v} = v_{\max} (100E_2s^3/qL^4)$.

laminato	0	90	(0/90) _s	0	90	(0/90) _s
# di el.	2-nodi Lagrangiano			3-nodi Lagrangiano		
1	1.3353	1.3334	1.3372	1.1375	1.1353	1.1407
2	1.0857	1.0834	1.0872	1.0513	1.0498	1.0539
4	1.0233	1.0209	1.0247	1.0098	1.0075	1.0103
8	1.0077	1.0053	1.0091	1.0009	1.0007	1.0025
16	1.0038	1.0014	1.0052	1.0000	1.0000	1.0009

Tabella III.2.4.4: Convergenza per la trave a mensola modellata con elementi misto -ibridi a 2 e 3 nodi e rapporto $s/L=1/100$. Valori normalizzati secondo la relazione $\hat{v} = v_{\max} (100E_2s^3/qL^4)$.

- Trave appoggiata laminata con carico concentrato in mezzeria (Figura III.2.4.4). In Tabella III.2.4.5 e in Tabella III.2.4.6 si riportano rispettivamente i *test* di convergenza normalizzati rispetto alla soluzione analitica [Reddy, 2004] per *mesh* sempre più fitta e per elementi a 2 e 3 nodi con rapporto s/L pari ad $1/20$ e $1/100$.

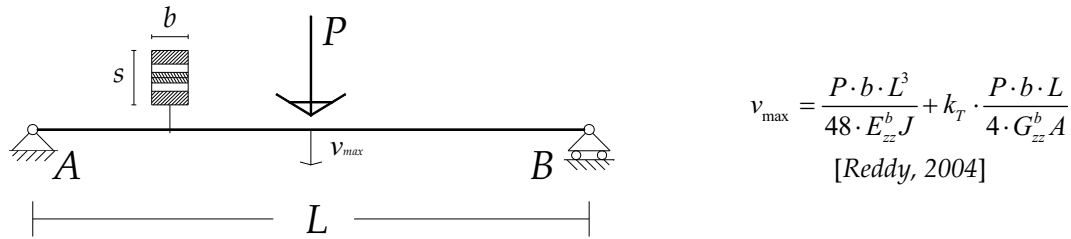


Figura III.2.4.4: Trave appoggiata laminata con carico concentrato in mezzeria.

laminato	0	90	(0/90) _s	0	90	(0/90) _s
# di el.	2-nodi Lagrangiano			3-nodi Lagrangiano		
2	1.0000	0.9911	1.0145	1.0000	0.9997	1.0002
16	1.0000	0.9911	1.0145	1.0000	0.9997	1.0002

Tabella III.2.4.5: Convergenza per la trave appoggiata modellata con elementi misto-ibridi a 2 e 3 nodi e rapporto $s/L=1/20$. Valori normalizzati secondo la relazione $\hat{v} = v_{\max} (100E_2s^3/PL^3)$.

laminato	0	90	(0/90) _s	0	90	(0/90) _s
# di el.	2-nodi Lagrangiano			3-nodi Lagrangiano		
2	1.0050	0.9996	1.0023	1.0001	0.9999	1.0003
16	1.0050	0.9996	1.0023	1.0001	0.9999	1.0003

Tabella III.2.4.6: Convergenza per la trave appoggiata modellata con elementi misto-ibridi a 2 e 3 nodi e rapporto $s/L=1/100$. Valori normalizzati secondo la relazione $\hat{v} = v_{\max} (100E_2s^3/PL^3)$.

- Trave appoggiata laminata con carico uniformemente distribuito (Figura III.2.3.4). In Tabella III.2.4.7 e in Tabella III.2.4.8 si riportano i *test* di convergenza normalizzati rispetto alla soluzione analitica [Reddy, 2004] al raffinarsi della *mesh* per elementi a 2 e a 3 nodi con rapporto s/L pari ad $1/20$ e $1/100$.

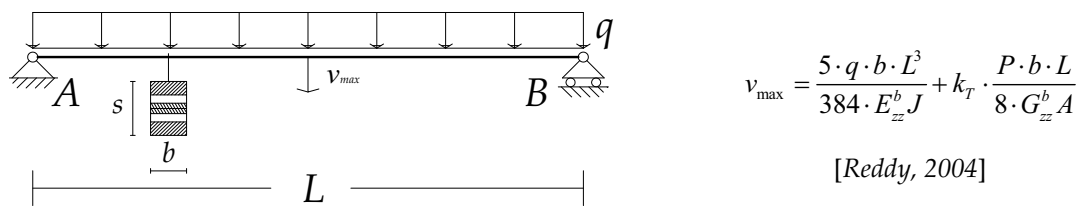


Figura III.2.4.4: Trave appoggiata laminata con carico concentrato in mezzeria.

laminato	0	90	(0/90) _s	0	90	(0/90) _s
# di el.	2-nodi Lagrangiano			3-nodi Lagrangiano		
2	0.8036	0.7944	0.8144	0.9076	0.8864	0.9204
4	0.9375	0.9427	0.9449	0.9739	0.9807	0.9843
8	0.9710	0.9797	0.9776	0.9815	0.9865	0.9860
16	0.9794	0.9890	0.9857	0.9945	0.9981	0.9975

Tabella III.2.4.7: Convergenza per la trave appoggiata modellata con elementi misto-ibridi a 2 e 3 nodi e rapporto $s/L=1/20$. Valori normalizzati secondo la relazione $\hat{v} = v_{\max} (100E_2s^3/qL^4)$.

laminato	0	90	(0/90) _s	0	90	(0/90) _s
# di el.	2-nodi Lagrangiano			3-nodi Lagrangiano		
2	0.8061	0.7998	0.8069	0.8994	0.8871	0.9002
4	0.9554	0.9497	0.9563	0.9657	0.9563	0.9694
8	0.9927	0.9872	0.9937	0.9932	0.9901	0.9943
16	1.0021	0.9965	1.0030	1.0008	0.9998	1.0010

Tabella III.2.4.8: Convergenza per la trave appoggiata modellata con elementi misto – ibridi a 2 e 3 nodi e rapporto $s/L=1/100$. Valori normalizzati secondo la relazione $\hat{v} = v_{\max} (100E_2s^3/qL^4)$.

III.3. Elementi finiti di lastra – piastra (*plate and shell*)

In questo paragrafo viene sviluppato un elemento finito misto – ibrido a due campi basato sul principio variazionale di Hu-Washizu modificato per piastre di Reissner-Mindlin piane laminate e nelle ipotesi cinematiche, per la deformazione della sezione retta, della *FSDT*.

La piastra laminata considerata (Figura III.3.1) è sottile o moderatamente spessa, composta da k strati (*layers*) aventi differenti caratteristiche meccaniche e occupa il seguente dominio fisico:

$$\beta_e = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in [-h/2, +h/2], (x, y) \in \bar{\beta}_e \subset \mathbb{R}^2\}. \quad (\text{III.3.1})$$

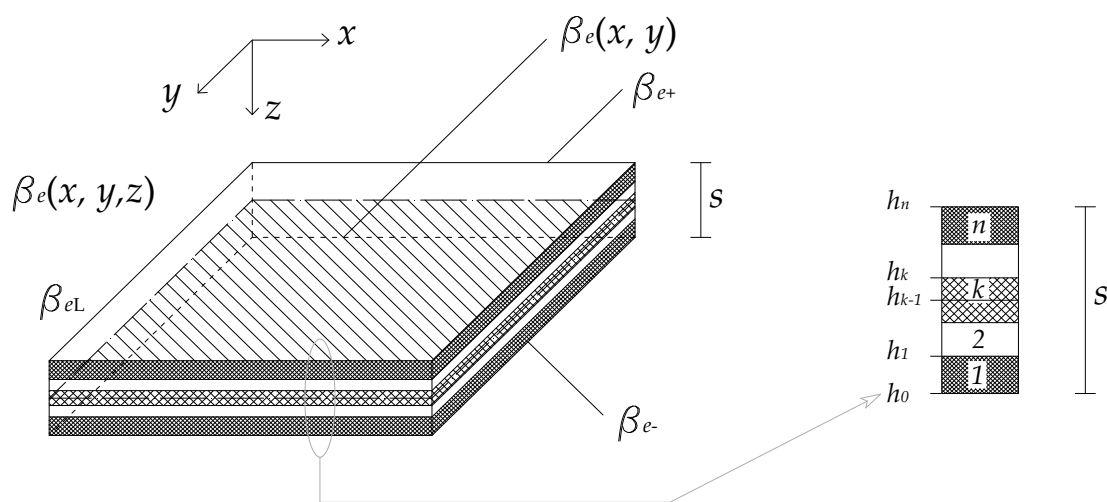


Figura III.3.1: Materiale composito laminato.

Assumendo una perfetta aderenza tra gli strati e quindi il principio di conservazione delle sezioni piane le componenti del campo di deformazione locale nel piano della piastra si possono scrivere come:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx}(x, y, z) &= \varepsilon_{xx}^0(x, y) + z\bar{\varepsilon}_{xx}(x, y) \\ \varepsilon_{yy}(x, y, z) &= \varepsilon_{yy}^0(x, y) + z\bar{\varepsilon}_{yy}(x, y) \\ \varepsilon_{xy}(x, y, z) &= \varepsilon_{xy}^0(x, y) + z\bar{\varepsilon}_{xy}(x, y),\end{aligned}\quad (\text{III.3.2})$$

dove $\varepsilon_{xx}^0, \varepsilon_{yy}^0, \varepsilon_{xy}^0$ sono le componenti di deformazione estensionale riferite alla superficie media e $\bar{\varepsilon}_{xx}, \bar{\varepsilon}_{yy}, \bar{\varepsilon}_{xy}$ le corrispondenti componenti flessionali. Se si introducono le equazioni costitutive e le si impone a livello locale per la k -esima lamina è possibile determinare le componenti di tensione nel piano della lamina stessa, che risultano così definite:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^k(x, y, z) &= C_{11}^k \left[\varepsilon_{xx}^0(x, y) + z\bar{\varepsilon}_{xx}(x, y) \right] + C_{12}^k \left[\varepsilon_{yy}^0(x, y) + z\bar{\varepsilon}_{yy}(x, y) \right] \\ \sigma_{yy}^k(x, y, z) &= C_{12}^k \left[\varepsilon_{xx}^0(x, y) + z\bar{\varepsilon}_{xx}(x, y) \right] + C_{22}^k \left[\varepsilon_{yy}^0(x, y) + z\bar{\varepsilon}_{yy}(x, y) \right] \\ \sigma_{xy}^k(x, y, z) &= C_{66}^k \left[\varepsilon_{xy}^0(x, y) + z\bar{\varepsilon}_{xy}(x, y) \right].\end{aligned}\quad (\text{III.3.3})$$

Nelle (III.3.3) $C_{11}^k, C_{12}^k, C_{22}^k, C_{66}^k$ sono i coefficienti elastici della lamina, ipotizzata come un solido a comportamento ortotropo.

Analogamente a quanto visto per l'elemento finiti di trave, procedendo via equazioni locali di equilibrio (scritte con riferimento al caso in cui le forze di volume siano nulle) è possibile ottenere le componenti delle tensioni tangenziali agenti fuori dal piano:

$$\sigma_{xz,z}^k = -(\sigma_{xx,x}^k + \sigma_{xy,y}^k); \quad \sigma_{yz,z}^k = -(\sigma_{xy,x}^k + \sigma_{yy,y}^k). \quad (\text{III.3.4})$$

Integrando le (III.3.4) e applicando il legame costitutivo inverso si ottengono le componenti di scorrimento fuori dal piano per la k -esima lamina che risultano:

$$\varepsilon_{xz}^k = \frac{\sigma_{xz}^k}{2C_{55}^k}; \quad \varepsilon_{yz}^k = \frac{\sigma_{yz}^k}{2C_{44}^k}, \quad (\text{III.3.5})$$

dove C_{44}^k, C_{55}^k sono ancora i coefficienti elastici della lamina, schematizzata, per maggiore generalità, come un solido ortotropo.

Considerando ora le componenti del campo di spostamenti nel piano della lastra si osserva che sono determinate dalla somma di un contributo estensionale u_j^0 e di uno flessionale $z\bar{\varphi}_j$ e possono quindi essere scritte come:

$$\begin{aligned} s_x(x, y, z) &= u_x(x, y) - z\bar{\varphi}_x(x, y) \\ s_y(x, y, z) &= u_y(x, y) - z\bar{\varphi}_y(x, y). \end{aligned} \quad (\text{III.3.6})$$

In Figura III.3.2 sono rappresentate le componenti rotazionali della (III.3.6):

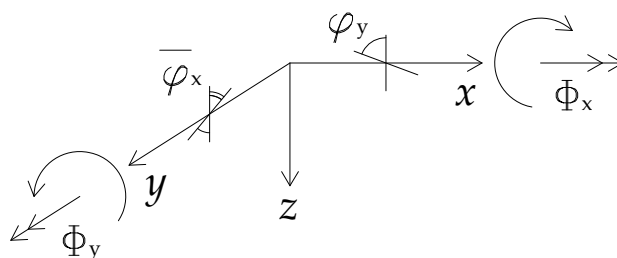


Figura III.3.2: Rotazioni nell'elemento piastra.

Infine la componente normale al piano medio della piastra del campo di spostamenti si scrive come:

$$s_z(x, y, z) = u_z(x, y), \quad (\text{III.3.7})$$

corrispondente a considerare rigide le fibre disposte perpendicolarmente alla superficie media. Se si impongono le condizioni di compatibilità si ottengono le componenti non nulle del campo di deformazione locale infinitesima che risultano:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}(x, y, z) &= \frac{\partial s_x}{\partial x} = \varepsilon_{xx}^0(x, y) + z\bar{\varepsilon}_{xx}(x, y) \\ \varepsilon_{yy}(x, y, z) &= \frac{\partial s_y}{\partial y} = \varepsilon_{yy}^0(x, y) + z\bar{\varepsilon}_{yy}(x, y) \\ \varepsilon_{xy}(x, y, z) &= \frac{\partial s_x}{\partial y} + \frac{\partial s_y}{\partial x} = \varepsilon_{xy}^0(x, y) + z\bar{\varepsilon}_{xy}(x, y) \\ \gamma_{xz}(x, y, z) &= \frac{\partial s_x}{\partial y} + \frac{\partial s_z}{\partial x} = \bar{\varphi}_x + \partial u_z / \partial x \\ \gamma_{yz}(x, y, z) &= \frac{\partial s_y}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial y} = \bar{\varphi}_y + \partial u_z / \partial y, \end{aligned} \quad (\text{III.3.8})$$

espressi in funzione delle componenti generalizzate di deformazione, che sono:

$$\varepsilon_{ij}^0(x, y) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right); \quad \bar{\varepsilon}_{ij}(x, y) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{\varphi}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{\varphi}_j}{\partial x_i} \right), \quad (\text{III.3.9})$$

e corrispondono rispettivamente alle deformazioni estensionali del piano medio e alle curvature dello stesso.

Ancora una volta tutte le equazioni che governano il problema possono essere dedotte dal principio variazionale di Hu-Washizu modificato (III.2.3), che in questo caso si specializza così:

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{mod}}^{HW}(\varepsilon_{ij}, u_i) = & -\frac{1}{2} \int_{\beta_e} (C_{ijhk} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{hk}) dV + \int_{\beta_e} [(C_{ijmn} \varepsilon_{mn,j} - B_i) u_i] dV \\ & + \int_{\partial\beta_e} [(C_{ijmn} \varepsilon_{mn} n_j) \bar{u}_i] dA + L_{\text{ext}} \end{aligned} \quad (\text{III.3.10})$$

Dove C_{ijhk} , $\varepsilon_{ij/hk}$, B_i , u_i e \bar{u}_i sono rispettivamente il tensore costitutivo, il tensore di deformazione infinitesima, le forze di volume (che verranno poi assunte nulle), i campi di spostamento e gli spostamenti imposti sul contorno.

Nel caso di piastre laminate ed in assenza di forze di volume occorre tener conto del contributo delle singole lamine e il funzionale (III.3.10) diventa:

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{mod}}^{HW}(\varepsilon_{ij}, u_i) = & \sum_{k=1}^K \left[-\frac{1}{2} \int_{\beta_e} (C_{ijhk} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{hk}) dV + \int_{\beta_e} [(C_{ijmn} \varepsilon_{mn,j} - B_i) u_i] dV \right. \\ & \left. + \int_{\partial\beta_e} [(C_{ijmn} \varepsilon_{mn} n_j) \bar{u}_i] dA + L_{\text{ext}} \right]. \end{aligned} \quad (\text{III.3.11})$$

III.3.1. Elemento misto – ibrido ottimale a quattro nodi

Sempre nelle ipotesi di ricorrere a elementi ottimali i parametri di deformazione che si possono utilizzare risultano in tutto 14. In questo caso, per *plate and shell* rettangolari, l'interpolazione dei campi di deformazione generalizzata relativi al comportamento estensionale nel piano e a quello flessionale si può scegliere in questa forma:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^{0k} = \alpha_1 + \alpha_2 y & \quad \varepsilon_{yy}^{0k} = \beta_1 + \beta_2 x & \quad 2\varepsilon_{xy}^{0k} = \gamma_1 \\ \varepsilon_{xx}^{-k} = \alpha_3 + \alpha_4 x + \alpha_5 y & \quad \varepsilon_{yy}^{-k} = \beta_3 + \beta_4 x + \beta_5 y & \quad 2\varepsilon_{xy}^{-k} = \gamma_2 + \gamma_3 x^2 + \gamma_4 y^2. \end{aligned} \quad (\text{III.3.1.1})$$

Le altre componenti dei campi di deformazione sono valutate tramite la procedura descritta in precedenza nelle equazioni (III.3.2. – III.3.5) e ciò indipendentemente dal numero di lamine.

Per gli usuali elementi isoparametrici Lagrangiani a 4 nodi (Figura III.3.1.1.) l'interpolazione dei campi di spostamento si scrive:

$$\begin{cases} u_x = L_{a1}u_{x1} + L_{a2}u_{x2} + L_{a3}u_{x3} + L_{a4}u_{x4} \\ u_y = L_{a1}u_{y1} + L_{a2}u_{y2} + L_{a3}u_{y3} + L_{a4}u_{y4} \\ u_z = L_{a1}u_{z1} + L_{a2}u_{z2} + L_{a3}u_{z3} + L_{a4}u_{z4} \\ \varphi_x = L_{a1}\varphi_{x1} + L_{a2}\varphi_{x2} + L_{a3}\varphi_{x3} + L_{a4}\varphi_{x4} \\ \varphi_y = L_{a1}\varphi_{y1} + L_{a2}\varphi_{y2} + L_{a3}\varphi_{y3} + L_{a4}\varphi_{y4} \end{cases} \quad L_{ai}(\xi, \eta) = \frac{(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)}{4} \quad (\text{III.3.1.2})$$

$$\rightarrow \begin{cases} s_x = \sum_{i=1}^4 L_{ai}u_{xi} - z \sum_{i=1}^4 L_{ai}\varphi_{xi} \\ s_y = \sum_{i=1}^4 L_{ai}u_{yi} - z \sum_{i=1}^4 L_{ai}\varphi_{yi} \\ s_z = \sum_{i=1}^4 L_{ai}u_{zi} \end{cases}$$

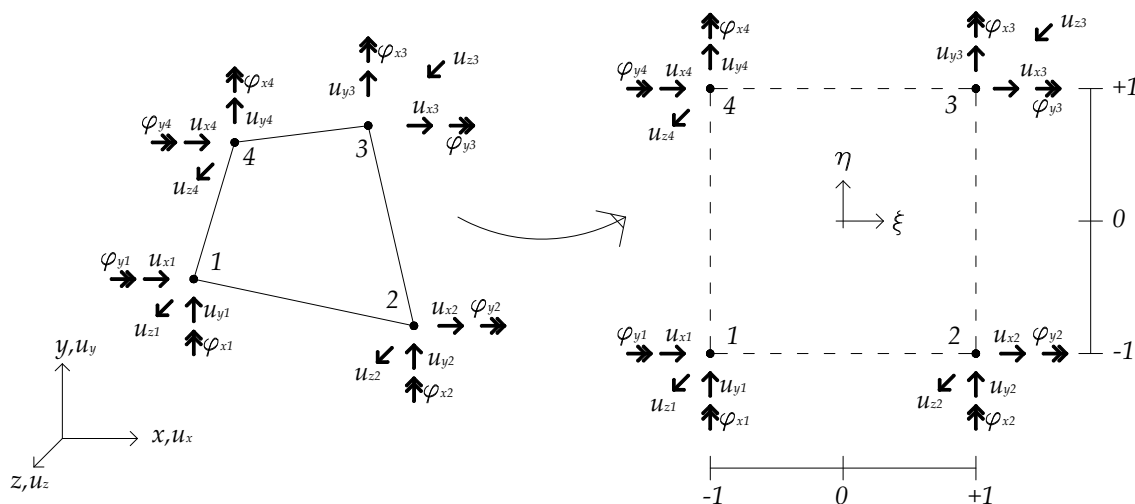


Figura II.3.1.1: Modello agli elementi finiti per piastre-lastre di Reissner-Mindlin.

Procedendo alla discretizzazione del funzionale di Hu-Washizu modificato si ha:

$$\Pi_{\text{mod}}^{HW} = -\frac{1}{2} \underline{\beta}^T \underline{H}_{\beta\beta} \underline{\beta} + \underline{\beta}^T \underline{G} \underline{q} - \underline{Q}^T \underline{q} \quad (\text{III.3.1.3})$$

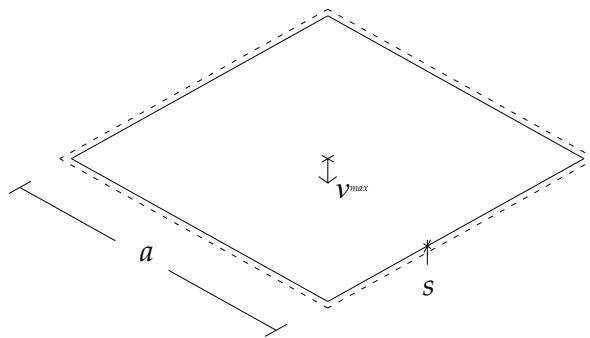
Dove $\underline{q} = [u_{x1}, u_{y1}, u_{z1}, \varphi_{x1}, \varphi_{y1}, \dots, \varphi_{y4}]$ rappresenta il vettore degli spostamenti nodali mentre $\underline{\beta} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \gamma_4]$ il vettore dei parametri di deformazione.

Imponendo la stazionarietà del funzionale (III.3.1.3) rispetto ai parametri di deformazione $\underline{\beta}$ e a quelli cinematici \underline{q} ed eseguendo la condensazione statica dei parametri $\underline{\beta}$ si determina la matrice di rigidità *elastica* del singolo elemento finito:

$$\begin{cases} \underline{\beta} = \underline{H}^{-1} \underline{G} \underline{q} \\ \underline{G}^T \underline{H}^{-1} \underline{G} \underline{q} = \underline{Q} \rightarrow \underline{K}_e \underline{q} = \underline{Q} \end{cases} \quad (\text{III.3.1.4})$$

III.3.2. Test numerici per piastre omogenee

- Piastra sottile, omogenea, quadrata, appoggiata sui 4 lati e caricata uniformemente (Figura III.3.2.1). In Tabella III.3.2.1 si riporta, in forma adimensionale, il *test* di convergenza alla soluzione analitica [Corradi, 1992] con un raffinamento crescente della *mesh* (Figura III.3.2.2) e per rapporto s/a pari a $1/100$.

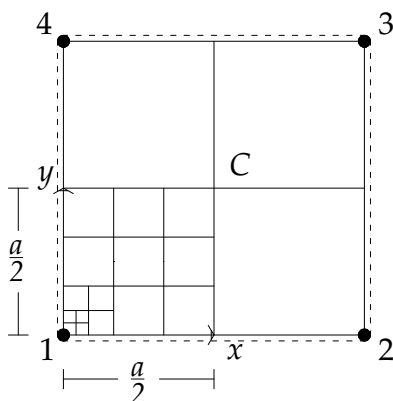


Soluzione di riferimento (dalla teoria della piastra):

$$v_{\max} = 0.004062 \cdot \frac{q \cdot a^4}{D}$$

[Corradi, 1992]

Figura III.3.2.1: Piastra appoggiata con carico uniformemente distribuito.



# <i>mesh</i>	el. MH	err. %
3x3	0.9832	1.68
6x6	1.0001	0.01
12x12	1.0003	0.03

Tabella III.3.2.1: Convergenza per la piastra omogenea appoggiata modellata con elementi misto –ibridi a 4 nodi e rapporto $s/a=1/100$ e soggetta a carico uniforme.

Figura III.3.2.2: Raffinamento della *mesh*.

In Figura III.3.2.3 è riportata la curva di convergenza alla soluzione di riferimento.

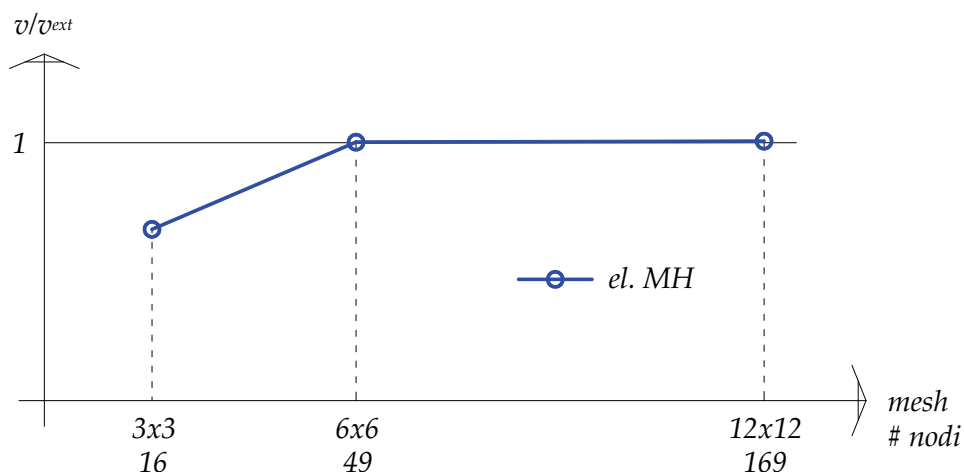


Figura III.3.2.3: Curve di convergenza.

- Piastra moderatamente spessa, omogenea, quadrata, appoggiata sui 4 lati e caricata uniformemente (Figura III.3.2.1). In Tabella III.3.2.3 si riporta il *test* di convergenza comparato con il programma FEM *Staus7* [†] al raffinarsi della *mesh* (Figura III.3.2.3) per rapporto s/a pari a 1/10.

Dati: $a = 200$ (cm); $E = 300000$ (daN/cm²); $\nu = 0.3$; $q = 1$ (daN/cm²).

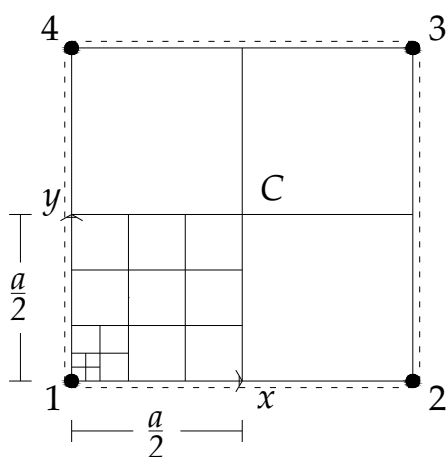


Figura III.3.2.3: Raffittimento della *mesh*.

# <i>mesh</i>	el. MH	<i>Staus7</i> [†]
3x3	0.03119	0.03097
6x6	0.03114	0.03107
12x12	0.03111	0.03110

Tabella III.3.2.2: Convergenza per la piastra omogenea appoggiata con rapporto $s/a=1/10$.

Si precisa che, come consigliato dalla guida di del programma FEM *Staus7*, si sono utilizzati elementi *plate and shell* a 8 nodi.

- Piastra, omogenea, quadrata, appoggiata sui 4 lati soggetta a carico sinusoidale $q(x,y) = q \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)$ (Figura III.3.2.4). In Tabella III.3.2.2 si riporta, in forma adimensionale, il *test* di convergenza alla soluzione analitica [Corradi, 1992] per *mesh* sempre più fitta (Figura III.3.2.3) per rapporto s/a pari a 1/100.

Soluzione di riferimento: $v_{\max} = 0.00257 \cdot \frac{q \cdot a^4}{D}$ [Corradi, 1992] = 18.7096

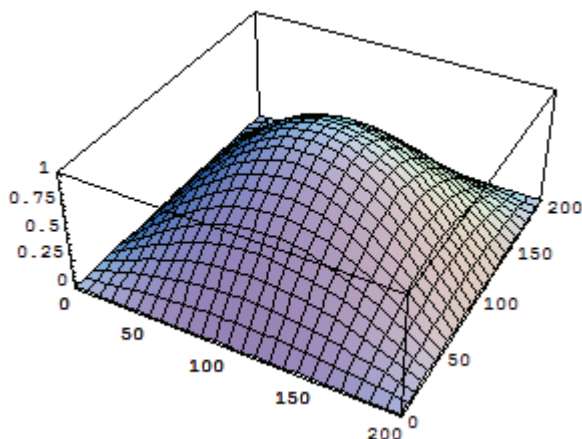


Figura III.3.2.4: Carico sinusoidale.

# <i>mesh</i>	el. MH	err. %
3x3	0.9989	0.11
6x6	1.0037	0.37
12x12	1.0005	0.05

Tabella III.3.2.3: Convergenza per la piastra omogenea appoggiata modellata con elementi misto-ibridi a 4 nodi e rapporto $s/a=1/100$ e soggetta a carico sinusoidale.

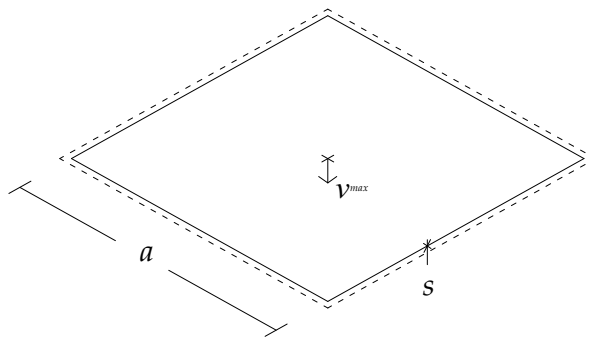
† *Staus7* ver. 2.3.6: Codice agli elementi finiti commerciale, sviluppato e distribuito da Strand7.

III.3.3. Test numerici per piastre laminate

- Piastra laminata quadrata semplicemente appoggiata sui quattro lati e caricata uniformemente (Figura III.3.3.1). Lo schema di laminazione considerato è $0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$ che viene indicato con $(0,90)_s$ [Reddy, 2004].

Parametri meccanici del materiale:

$$\frac{E_x}{E_y} = 25; \quad G_{xy} = G_{xz} = 0.5E_y; \quad G_{yz} = 0.2E_y; \quad \nu_{xy} = 0.25 .$$



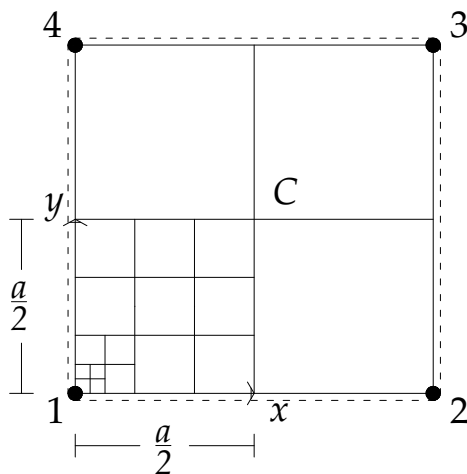
Valori numerici normalizzati secondo la relazione:

$$\hat{v} = v_{\max} \left(\frac{100E_2s^3}{qa^4} \right)$$

[Reddy, 2004]

Figura III.3.3.1: Piastra appoggiata con carico uniformemente distribuito.

In Tabella III.3.3.1. si riportano in forma adimensionale i *test* di convergenza alla soluzione analitica [Reddy; 2004] al raffinarsi della *mesh* (Figura III.3.3.2) nei due casi di rapporto s/a pari ad $1/10$ e $1/100$.



# <i>mesh</i>	<i>el. MH</i> ($s/a=1/10$)	<i>el. MH</i> ($s/a=1/100$)
3x3	1.0464	0.6885
6x6	1.0366	0.6860
12x12	1.0339	0.6851
<i>FSDT</i>	1.0250	0.6833

Tabella III.3.3.1: Convergenza per la piastra laminata appoggiata modellata con elementi misto -ibridi a 4 nodi per diversi valori del rapporto s/a . Schema di laminazione $(0,90)_s$.

Figura III.3.3.2: Raffittimento *mesh*.

- Piastra, laminata, quadrata, appoggiata sui 4 lati soggetta a carico sinusoidale

$q(x, y) = q \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)$ (Figura III.3.3.3). Lo schema di laminazione considerato è

$0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$ che viene indicato con $(0,90)_s$ [Reddy, 2004].

Parametri meccanici del materiale:

$$\frac{E_x}{E_y} = 25; \quad G_{xy} = G_{xz} = 0.5E_y; \quad G_{yz} = 0.2E_y; \quad \nu_{xy} = 0.25.$$

In Tabella III.3.3.2 si riporta, per *mesh* sempre più raffinata e in forma adimensionale, il *test* di convergenza alla soluzione di riferimento [Reddy, 2004] con rapporto s/a pari a 1/10 e 1/100.

Soluzione di riferimento:

$$v_{ext} = v_{max} \cdot \frac{\pi^4 \cdot \hat{Q} \cdot s^3}{12q \cdot a^4}, \quad \text{dove: } \hat{Q} = 4G_{xy} + \frac{E_x + E_y(1 + \nu_{yz})}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}}; \quad [\text{Reddy, 2004}]$$

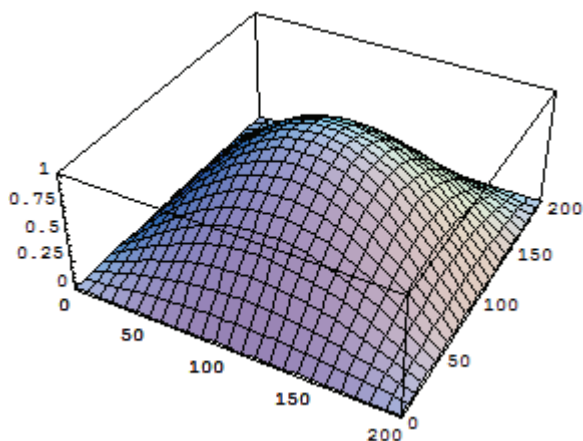


Figura III.3.3.3: Carico sinusoidale.

# <i>mesh</i>	<i>el. MH</i> ($s/a=1/10$)	<i>el. MH</i> ($s/a=1/100$)
3x3	1.5191	0.9781
6x6	1.5073	0.9790
12x12	1.5042	0.9784
<i>FSDT</i>	1.5370	1.0060

Tabella III.3.3.2: Convergenza per la piastra laminata appoggiata modellata con elementi misto -ibridi a 4 nodi e rapporto $s/a=1/100$ e soggetta a carico sinusoidale. Schema di laminazione $(0,90)_s$.

In Figura III.3.3.4 e III.3.3.5 si riportano, in due differenti punti di Gauss che verranno visualizzati per chiarezza con la *mesh* più grossolana, gli andamenti delle tensioni tangenziali τ_{xz} , τ_{yz} sulla piastra laminata con rapporto $s/a=1/10$.

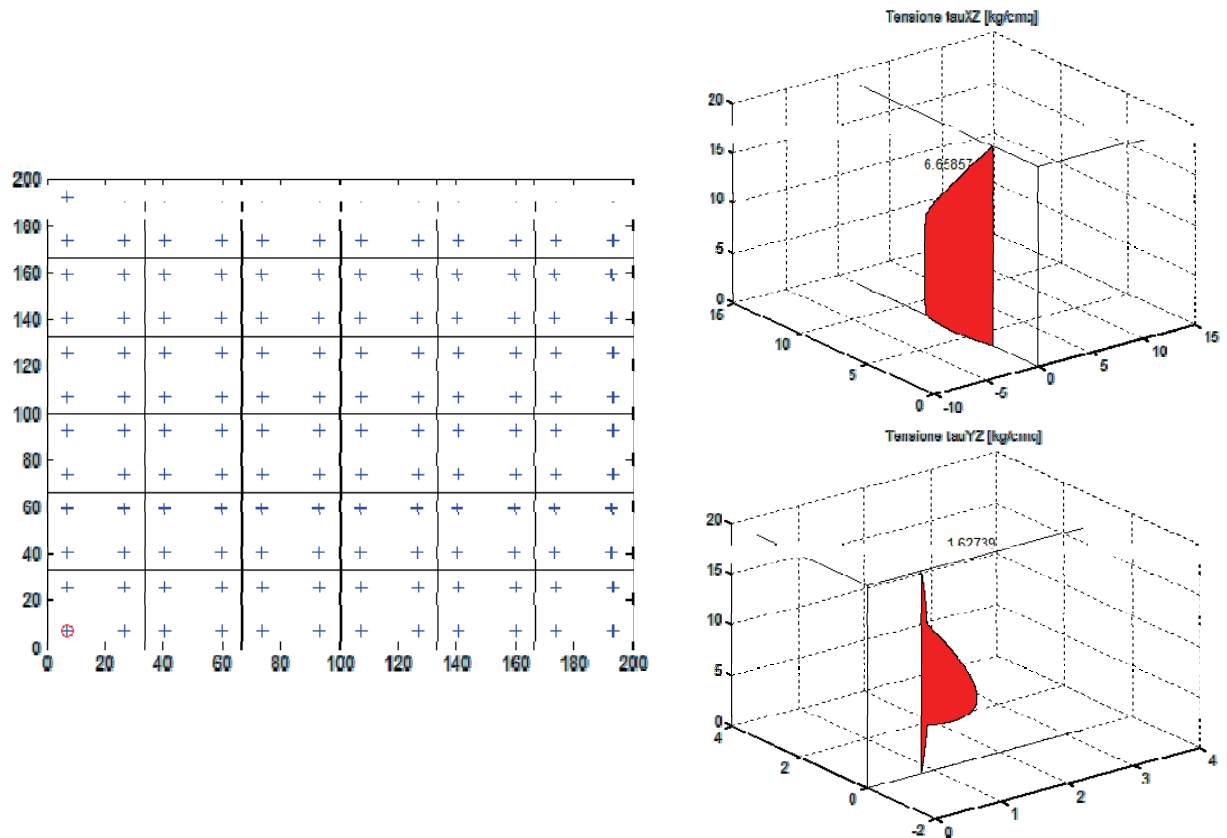


Figura III.3.3.4: Andamento delle tensioni tangenziali τ_{xz} , τ_{yz} nel punto di Gauss più in prossimità di un angolo della piastra.

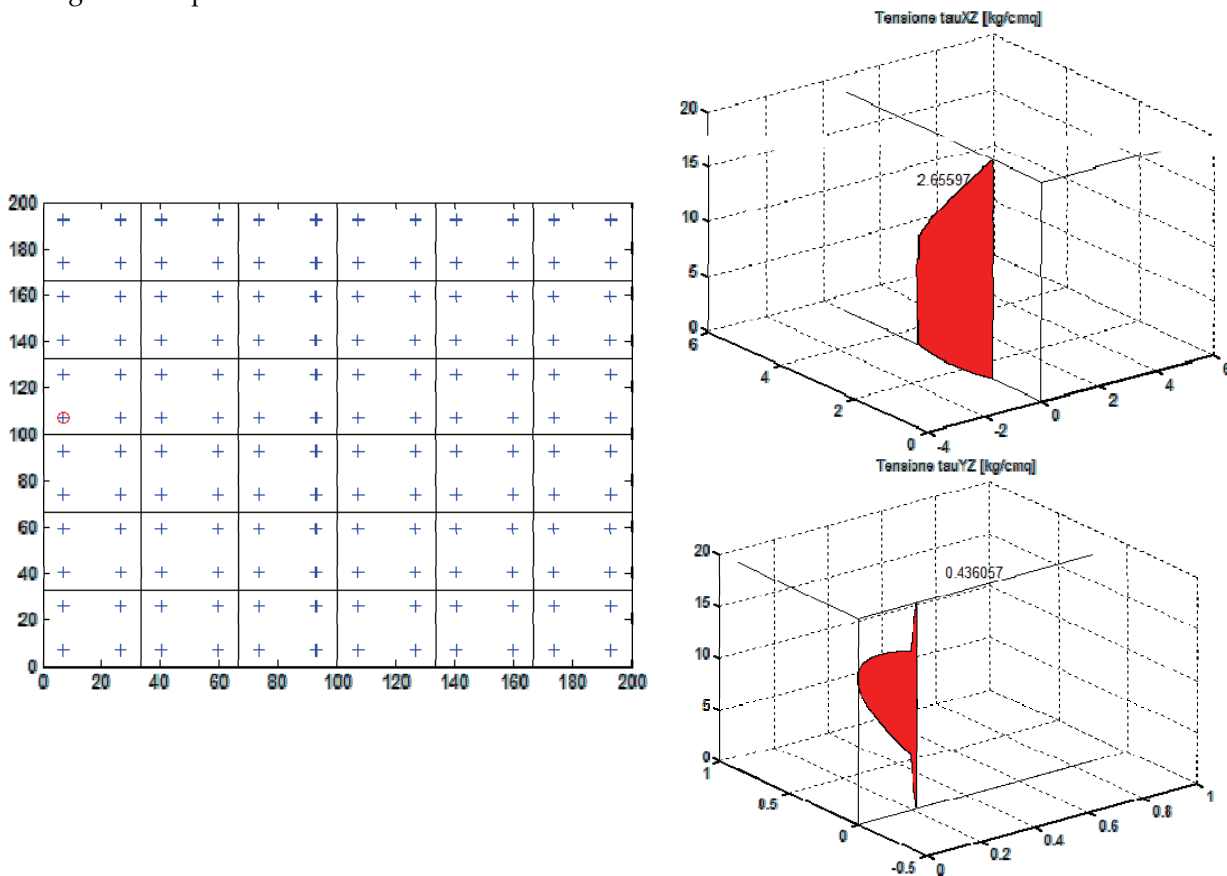


Figura III.3.3.5: Andamento delle tensioni tangenziali τ_{xz} , τ_{yz} nel punto di Gauss più in prossimità della mezzeria di un lato della piastra.

Si osservi, analogamente al caso della trave, che è rispettata la condizione di superficie laterale scarica ($\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$) e che il modello misto – ibrido presentato riproduce esattamente la variazione dei moduli elastici con il passaggio di *layer*.

III.4. Conclusioni

I *test* numerici condotti per gli elementi misti – ibridi di trave e lastra-piastra proposti hanno evidenziato una buona convergenza alle soluzioni analitiche o di riferimento. Si fa notare che la formulazione utilizzata consente di non introdurre a priori il fattore di correzione a taglio, come invece è necessario per gli elementi finiti agli spostamenti, e che non è presente alcun fenomeno di *shear-locking*.

La descrizione delle tensioni tangenziali sia nelle travi che nelle lastre-piastre laminate è rispettosa delle condizioni di equilibrio ai bordi superiore e inferiore e consente di cogliere in maniera molto efficace la variazione di moduli elastici (tangenziale e longitudinale) con il passaggio da una lamina a quella successiva.

Bibliografia

- [1] Auricchio F., Taylor R. L. 1994. *A shear deformable plate with an exact thin limit – Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **118**: 393-412.
- [2] Auricchio F., Sacco E. 1999. *Partial-mixed formulation and refined models for the analysis of composite laminates within an FSDT – Composite Structures*, **46**: 103-113.
- [3] Bisegna P., Sacco E. 1997. *A layer-wise laminate theory rationally deduced from the three dimensional elasticity – Journal of Applied Mechanics ASME*, **64**: 538-545.
- [4] Caporale A., Luciano R., Sacco E. 2006. *Micromechanical analysis of interfacial debonding in unidirectional fiber-reinforced composites – Computer and Structures*, **84**: 2200-2211.
- [5] Cazzani A., Atluri S. N. 1993. *Four-noded mixed finite elements, using unsymmetric stresses, for linear analysis of membranes – Computational Mechanics*, **11**: 229-251.
- [6] Cazzani A., Lovadina C. 1997. *On some mixed finite element methods for plane membrane problems – Computational Mechanics*, **20**: 560-572.
- [7] Cazzani A., Garusi E., Tralli A. 2004. *An unsymmetric stress formulation for Reissner-Mindlin plates: a simple and locking-free rectangular element – International Journal of Computational Engineering Science*, **5**: 589-618.
- [8] Cazzani A., Garusi E., Tralli A., Atluri S. N. 2005. *A four-node hybrid assumed strain finite element for laminated composite plates – Computers Materials and Continua*, **2**: 101-116.
- [9] Cen S., Long Y., Yao Z. 2002. *A new hybrid-enhanced displacement-based element for the analysis of laminated composite plates – Computers and Structures*, **80**: 819-833.
- [10] Chepiga V.E. 1976. *Refined theory of multilayered shells – Prikladnaia Mekhanika*, **12**: 45-49.
- [11] Cicala P. 1962. *Consistent approximation in shell theory – Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE*, **88**: 45-74.
- [12] Corradi Dell'acqua L. 1992. *Meccanica delle strutture vol.2 - le teorie strutturali e il metodo degli elementi finiti – McGraw-Hill, Milano*.

-
- [13] Di Sciuva M. 1987. *An improved shear deformation theory for moderately thick multi-layered anisotropic shell and plates* – Journal of Applied Mechanics ASME, **54**: 589-596.
- [14] Dong Y. F., Wu C. C., Texeira de Freitas J. A. 1993. *The Hybrid stress model for Mindlin-Reissner plates based on a stress optimization condition* – Computer and Structures, **46**: 877-897.
- [15] Heppler G. R., Hansen J. S. 1986. *A Mindlin element for thick and deep shells* – Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **54**: 21-47.
- [16] Liou W-J., Sun C.T. 1987. *A three-dimensional hybrid stress isoparametric element for the analysis of laminated composite plates* – Computer and Structures, **25**: 241-249.
- [17] Pagano N.J. 1970. *Exact solution for rectangular bidirectional composites and sandwiches plates* – Journal of Composites Materials, **4**: 20-34.
- [18] Poniatovskii V.V. 1962. *Theory of plates of medium thickness* – Prikladnaia Mekhanika, **26**: 335-341.
- [19] Reddy J.N. 1987. *A simple higher-order theory for laminated composite plates* – Journal of Applied Mechanics ASME, **51**: 745-752.
- [20] Reddy J.N. 2004. *Mechanics of laminated composite plates and shells 2nd edition* – CRC Press, Boca Raton, FL.
- [21] Yang P.C., Norris C.H., Stavsky Y. 1966. *Elastic wave propagation in heterogeneous plates* – International Journal of Solids and Structures, **2**: 665-684.

Capitolo IV

CARICHI CRITICI EULERIANI DI TRAVI E PIASTRE PIANE OMOGENEE E LAMINATE - DELAMINAZIONE

IV.1. Introduzione

Le strutture in laminato composito in virtù della loro elevata resistenza; presentano membrature piuttosto esili e quindi risultano soggette a problemi di stabilità dell'equilibrio.

Inoltre, come si è già detto nel Capitolo III, per esse sono di fondamentale importanza le deformazioni taglianti.

Come mostrato al Capitolo I lo studio di questi fenomeni tramite elementi finiti agli spostamenti comporta una serie di problemi tra i quali lo *shear-locking* che incidono in modo sostanziale sull'attendibilità dei risultati; un secondo aspetto che rende inadeguato l'approccio degli elementi finiti agli spostamenti è che volendo seguire il percorso post-critico di travi e piastre in composito laminato si devono sviluppare elementi finiti curvi che, come noto, sono soggetti al problema del *membrane-locking*.

Ciò giustifica lo sviluppo di elementi finiti di tipo ibrido - misti capaci di cogliere, con un'adeguata accuratezza e con un onere computazionale ancora accettabile, il carico critico e la relativa deformata critica per travi e piastre, anche in laminato composito.

IV.2. Spostamenti finiti: analisi del secondo ordine

Per la determinazione del carico critico Euleriano (o analisi di *buckling*) occorre considerare l'equilibrio della struttura in configurazione deformata [si veda *Corradi, 1992*].

A questo scopo si riportano brevemente alcuni richiami riguardanti concetti fondamentali di meccanica dei continui.

IV.2.1. Analisi della deformazione

Con riferimento alla Figura IV.2.1.1 si considera un punto materiale indicato con $P_1 = [x_1, y_1, z_1]^T$ nella configurazione di riferimento β_0 e con $P_2 = [x_2, y_2, z_2]^T$ nella configurazione attuale β . Si definisce deformazione f la funzione che descrive il cambiamento di configurazione tale che:

$$P_2 = f(P_1). \quad (\text{IV.2.1.1})$$

Si ricorda che durante la deformazione di un mezzo continuo non è consentita, per ipotesi, alcuna compenetrazione tra porzioni del corpo né la formazione di lacerazioni; di conseguenza punti interni del dominio β_0 sono trasformati dalla f in punti interni del dominio β e, analogamente, i punti che appartengono alla superficie esterna del solido in una configurazione rimangono sulla frontiera anche in quella successiva.

Questi requisiti compongono i cosiddetti *assiomi di continuità della deformazione* e definiscono le proprietà che la funzione f deve soddisfare, in particolare:

- f deve essere biunivoca ovvero ad un valore di x corrisponde *uno e un solo valore* di y e viceversa;
- f deve essere continua e differenziabile quanto basta;

In Figura IV.2.1.1 è inoltre rappresentata la funzione inversa f^{-1} della deformazione f necessaria per passare dalla configurazione deformata β a quella di riferimento β_0 :

$$P_1 = f^{-1}(P_2), \quad (\text{IV.2.1.2})$$

anche per la funzione inversa si assumono le stesse ipotesi di regolarità e differenziabilità assunte per la f .

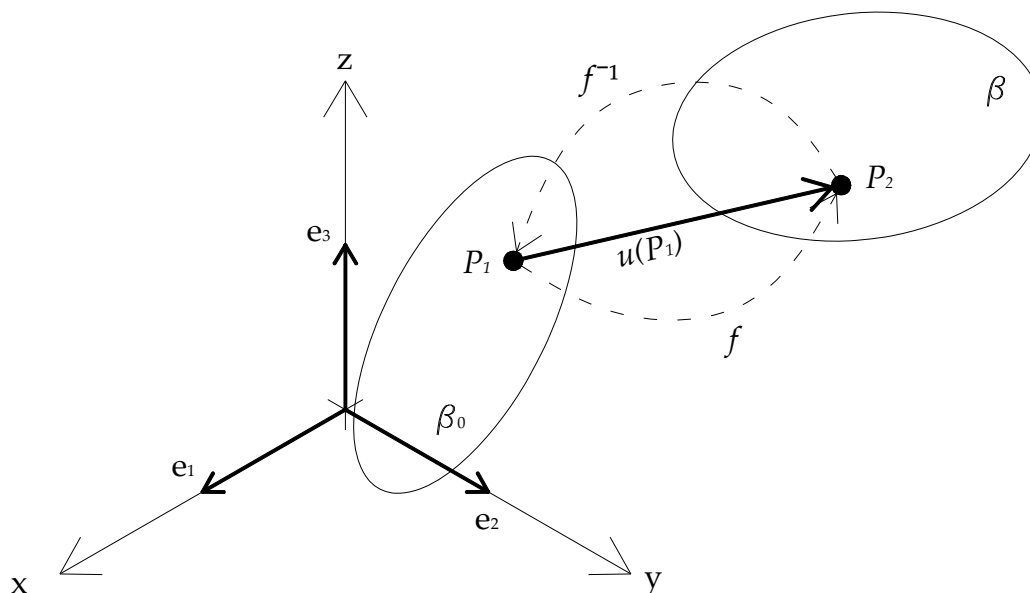


Figura IV.2.1.1: Cinematica della deformazione.

Si può pertanto definire il *gradiente di deformazione* $\underline{\underline{F}}$ che, operando in coordinate Cartesiane ortogonali assume questo aspetto:

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial x} & \frac{\partial x_2}{\partial y} & \frac{\partial x_2}{\partial z} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x} & \frac{\partial y_2}{\partial y} & \frac{\partial y_2}{\partial z} \\ \frac{\partial z_2}{\partial x} & \frac{\partial z_2}{\partial y} & \frac{\partial z_2}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (\text{IV.2.1.3})$$

Se si considera un punto P_1' nell'intorno di P_1 e il suo trasformato P_2' appartenente all'intorno di P_2 e si espande in serie di Taylor la deformazione a partire da P_1 si ha:

$$P_2' = f(P_1') = f(P_1) + \underline{\underline{F}} \cdot \overrightarrow{P_1' - P_1} + o\left(\overrightarrow{P_1' - P_1}\right), \quad (\text{IV.2.1.4})$$

se $\underline{\underline{F}}$ è costante in tutto il corpo la deformazione si dice *omogenea* e quindi risulta:

$$P_2' = f(P_1') = f(P_1) + \underline{\underline{F}} \cdot \overrightarrow{P_1' - P_1}. \quad (\text{IV.2.1.5})$$

Ciò permette di scrivere il differenziale $d\underline{\underline{P}}_2$ nella forma: $d\underline{\underline{P}}_2 = \underline{\underline{F}} \cdot d\underline{\underline{P}}_1$.

Volendo risolvere lo stesso problema nel caso di travi e piastre si deve ricostruire il campo di spostamento $\underline{u} = [u_x, u_y, u_z]^T$ del punto P_1 , rappresentato in Figura IV.2.1.1., e definito come:

$$u(P_1) = f(P_1) - P_1, \quad (\text{IV.2.1.6})$$

analogamente a quanto visto in precedenza si può definire il *gradiente di spostamento* $\underline{\hat{H}}$ come:

$$\underline{\hat{H}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad (\text{IV.2.1.7})$$

e sempre allo stesso modo, nel caso di deformazioni omogenee:

$$u(P_1') = u(P_1) + \underline{\hat{H}} \cdot [P_1' - P_1], \quad (\text{IV.2.1.8})$$

da cui consegue, essendo $u(P_1') = f(P_1') - P_1'$:

$$\underline{\hat{H}} = \underline{F} - \underline{I}. \quad (\text{IV.2.1.9})$$

Si considera il caso riportato in Figura IV.2.1.2 dove viene rappresentata una generica deformazione:

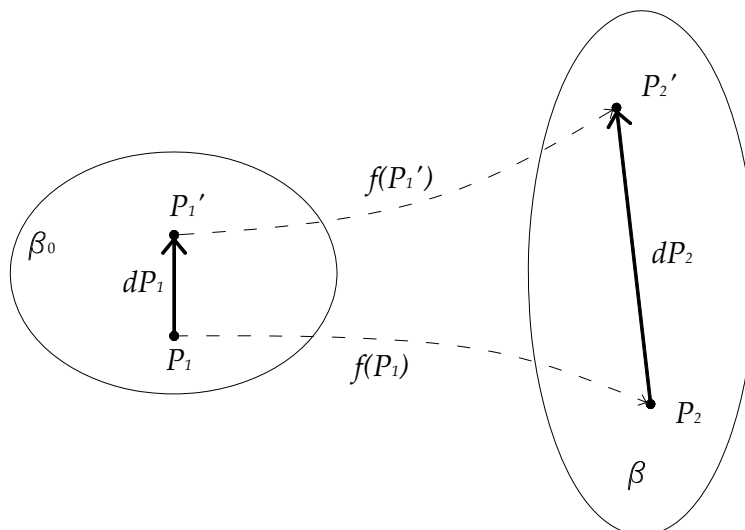


Figura IV.2.1.2: Generica deformazione di un solido.

La (IV.2.1.5) lega i differenziali $d\underline{P}_1$ e $d\underline{P}_2$ e per la (IV.2.1.9) si scrive:

$$\underline{F} = \frac{d\underline{P}_2}{d\underline{P}_1} = \frac{d\underline{u}}{d\underline{P}_1} + \underline{I}, \quad (\text{IV.2.1.10})$$

inoltre si ha:

$$\begin{cases} dP_2^2 = d\underline{P}_2^T \cdot d\underline{P}_2 = d\underline{P}_1^T \cdot \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} \cdot d\underline{P}_1 \\ dP_1^2 = d\underline{P}_1^T \cdot d\underline{P}_1 \end{cases}, \quad (\text{IV.2.1.11.a-b})$$

e dunque:

$$dP_1^2 - dP_2^2 = d\underline{P}_1^T \cdot (\underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}}) \cdot d\underline{P}_1 = 2 d\underline{P}_1^T \cdot \underline{\underline{E}} \cdot d\underline{P}_1. \quad (\text{IV.2.1.12})$$

Con questa si definisce la metrica della deformazione che permette di valutare le variazioni di lunghezza di tutti gli elementi della stella di centro P_1 .

Il tensore doppio simmetrico che compare nella (IV.2.1.12):

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}}), \quad (\text{IV.2.1.13})$$

è noto come tensore di *Green-Lagrange*, e risulta, per costruzione, simmetrico.

Le 6 componenti indipendenti del tensore di *Green-Lagrange* consentono di descrivere completamente qualunque stato di deformazione finita.

Si deve osservare peraltro che, nelle ipotesi di deformazioni infinitesime, il tensore di *Green-Lagrange* è ben approssimato da quello di deformazione infinitesima: sostituendo infatti la (IV.2.1.9) nella (IV.2.1.13) si ottiene:

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\hat{H}}} + \underline{\underline{\hat{H}}}^T + \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\hat{H}}}^T \underline{\underline{\hat{H}}} - \underline{\underline{I}}). \quad (\text{IV.2.1.14})$$

Se le deformazioni sono infinitesime il prodotto $\underline{\underline{\hat{H}}}^T \underline{\underline{\hat{H}}}$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto ai restanti addendi e quindi rimane:

$$\underline{\underline{E}} \simeq \frac{1}{2} (\underline{\underline{\hat{H}}} + \underline{\underline{\hat{H}}}^T) = \underline{\underline{\varepsilon}}. \quad (\text{IV.2.1.15})$$

Il tensore $\underline{\underline{\varepsilon}}$ è noto come *tensore di deformazione infinitesima* le cui componenti sono, ovviamente:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial u_x}{\partial x} & \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & 2 \frac{\partial u_y}{\partial y} & \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) & \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) & 2 \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_{yy} & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}. \quad (\text{IV.2.1.16})$$

Nella (IV.2.1.16) si riconoscono le componenti della deformazione che caratterizzano gli elementi finiti sviluppati nel Capitolo III. Nei casi di deformazioni finite il termine $\underline{\underline{\hat{H}}}^T \underline{\underline{\hat{H}}}$ della (IV.2.1.14) non è trascurabile e rientra nella formalizzazione dell'elemento finito. In altre parole per i casi di ricerca del carico critico e di studio del percorso post-critico si devono considerare anche i termini di ordine superiore (cioè non lineari) delle componenti di deformazione.

IV.2.2. Analisi della tensione

Mentre nel caso lineare le componenti di tensione coniugate, cioè quelle che compiono lavoro per le corrispondenti componenti di deformazione infinitesima sono gli sforzi di *Cauchy* nel caso di deformazioni finite si deve considerare il tensore $\underline{\underline{\hat{S}}}$, noto come *secondo* tensore di *Piola-Kirchhoff*. Si consideri a tal proposito il mezzo continuo nella generica configurazione β rappresentato in Figura IV.2.2.3.

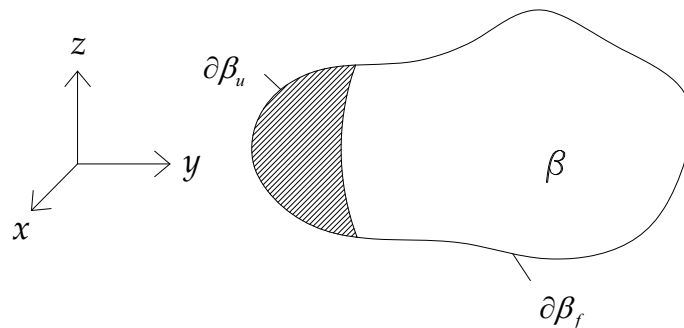


Figura IV.2.2.3: Mezzo continuo generico.

Sul corpo agiscono forze di volume $\underline{\underline{B}}$ agenti nel dominio β e forze di superficie $\underline{\underline{f}}$ agenti sul contorno $\partial\beta_f$ di β . Supponendo possibile definire un tensore doppio simmetrico $\underline{\underline{T}}$ in β , detto tensore di *Cauchy* degli sforzi, con conseguenti reazioni vincolari $\underline{\underline{r}}$ in $\partial\beta_u$ che soddisfino le equazioni (IV.2.2.1).

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\underline{\underline{T}}) + \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{0}} & \text{in } \beta \\ \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{f}} & \text{in } \partial\beta_f \\ \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{r}} & \text{in } \partial\beta_u \end{cases} \quad (\text{IV.2.2.1})$$

Si ha che forze e sforzi rispettosi di tali equazioni si dicono *staticamente ammissibili* in β , si definisce inoltre *cinematicamente ammissibile* un atto di moto, che a partire da β ,

individui un campo di velocità \underline{v} rispettoso delle condizioni di vincolo ($\bar{\underline{v}}$) su $\partial\beta_u$ e un tensore di velocità di deformazione $\hat{\underline{\underline{D}}}$ tali che:

$$\begin{cases} \hat{\underline{\underline{D}}}_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) & \text{in } \beta \\ v_j = \bar{v}_j & \text{in } \partial\beta_u. \end{cases} \quad (\text{IV.2.2.2})$$

A partire da queste ipotesi si può dimostrare il *principio delle potenze virtuali* che nel caso di spostamenti e deformazioni infinitesimi assume la forma:

$$\int_{\beta} (\underline{B} \cdot \underline{v}) dV + \int_{\partial\beta_f} (\underline{f} \cdot \underline{v}) dA + \int_{\partial\beta_u} (\underline{r} \cdot \bar{\underline{v}}) dA = \int_{\beta} (\underline{T} \cdot \hat{\underline{\underline{D}}}) dV, \quad (\text{IV.2.2.3})$$

ed esprime l'uguaglianza della potenza virtuale esterna, sviluppata dalle forze di volume e di superficie [queste ultime note sulla parte di contorno libero $\partial\beta_f$ (dove sono indicate con \underline{f}) e incognite (reazioni vincolari, \underline{r}) sulla parte di contorno vincolata $\partial\beta_u$] e dalla potenza virtuale interna sviluppata dagli sforzi \underline{T} agenti nella configurazione corrente per le componenti del tensore $\hat{\underline{\underline{D}}}$. Volendo ora studiare il caso delle deformazioni finite si deve considerare una differente definizione del tensore di deformazione. In particolare, come visto nel paragrafo precedente, è possibile descrivere la metrica della deformazione e della velocità di deformazione rispettivamente tramite i tensori doppi simmetrici di *Green-Lagrange* ($\underline{\underline{E}}$) e di velocità di deformazione finita di *Green-Lagrange* ($\dot{\underline{\underline{E}}}$) tali che siano univocamente determinati dal campo di spostamenti \underline{s} e di velocità \underline{v} e presentino una natura tensoriale:

$$\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}}(\underline{s}); \quad \dot{\underline{\underline{E}}} = \dot{\underline{\underline{E}}}(\underline{v}). \quad (\text{IV.2.2.4})$$

Dalla posizione (IV.2.2.4) consegue che la nuova misura di velocità di deformazione non è più associata allo sforzo di *Cauchy*, quindi nel principio delle potenze virtuali compare una nuova misura di sforzo $\hat{\underline{\underline{S}}}$ che, come quella di velocità di deformazione, è riferita alla configurazione iniziale β_0 ed è così determinata:

$$\int_{\beta} (\underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{D}}) dV = \int_{\beta_0} (\hat{\underline{\underline{S}}} \cdot \dot{\underline{\underline{E}}}) dV_0. \quad (\text{IV.2.2.5})$$

Nella (IV.2.2.5) il tensore $\hat{\underline{\underline{S}}}$ rappresenta una misura dello sforzo nella configurazione corrente β riferita alla configurazione iniziale β_0 . Per la validità del principio delle

potenze virtuali si devono anche sostituire le forze di volume \underline{B} e quelle di superficie \underline{f} riferite alla configurazione corrente β con le equivalenti misure riferite alla configurazione iniziale β_0 . Più precisamente si pone:

$$\int_{\beta} (\underline{B} \cdot \underline{v}) dV + \int_{\partial\beta_f} (\underline{f} \cdot \underline{v}) dA + \int_{\partial\beta_u} (\underline{r} \cdot \underline{v}) dA = \int_{\beta_0} (\hat{\underline{B}} \cdot \dot{\underline{s}}) dV_0 + \int_{\partial\beta_{0f}} (\hat{\underline{f}} \cdot \dot{\underline{s}}) dA_0 + \int_{\partial\beta_{0u}} (\hat{\underline{r}} \cdot \dot{\underline{s}}) dA_0. \quad (\text{IV.2.2.6})$$

Quindi il principio delle potenze virtuali con riferimento alla configurazione iniziale β_0 si scrive come:

$$\int_{\beta_0} (\hat{\underline{B}} \cdot \dot{\underline{s}}) dV_0 + \int_{\partial\beta_{0f}} (\hat{\underline{f}} \cdot \dot{\underline{s}}) dA_0 + \int_{\partial\beta_{0u}} (\hat{\underline{r}} \cdot \dot{\underline{s}}) dA_0 = \int_{\beta_0} (\hat{\underline{S}} \cdot \dot{\underline{E}}) dV_0. \quad (\text{IV.2.2.7})$$

Il primo addendo diventa, in virtù della formula di Nanson [‡]:

$$\int_{\beta} (\underline{B} \cdot \underline{v}) dV = \int_{\beta_0} (\det \underline{\underline{F}} \cdot \underline{B} \cdot \underline{v}) dV_0 = \int_{\beta_0} (\hat{\underline{B}} \cdot \dot{\underline{s}}) dV_0 \rightarrow \hat{\underline{B}} = \det \underline{\underline{F}} \cdot \underline{B}, \quad (\text{IV.2.2.8})$$

mentre sulla frontiera si ha:

$$\begin{aligned} \underline{f} \cdot d\underline{A} &= \underline{\underline{T}} \cdot \underline{n} \cdot d\underline{A} = \det \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \underline{n}_0 \cdot dA_0 \\ \rightarrow \int_{\partial\beta} (\underline{f} \cdot \underline{v}) dA &= \int_{\partial\beta_0} \left(\det \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{s}}^T \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \underline{n}_0 \right) dA_0 = \int_{\partial\beta_0} (\hat{\underline{f}} \cdot \dot{\underline{s}}^T) dA_0 \\ \rightarrow \hat{\underline{f}} &= \det \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \underline{n}_0, \end{aligned} \quad (\text{IV.2.2.9})$$

‡Formula di Nanson: Mette in relazione la deformazione di due aree orientate $d\underline{A}$ (con versore normale \underline{n}) nella configurazione corrente β e $d\underline{A}_0$ (con versore normale \underline{n}_0) nella configurazione di riferimento β_0 . Considerando poi nella configurazione corrente i due vettori infinitesimi \underline{u} e \underline{v} (normali al versore \underline{n}) che generano l'area $d\underline{A}$ e corrispondono, comunque, nella configurazione di riferimento ai trasformati dei vettori infinitesimi \underline{u}_0 e \underline{v}_0 (normali al versore \underline{n}_0) che generano l'area $d\underline{A}_0$ si ha, per la definizione di prodotto vettoriale che:

$$d\underline{A} = \underline{v} \times \underline{u} \rightarrow dA = d\underline{A} \cdot \underline{n} = (\underline{v} \times \underline{u}) \cdot \underline{n}$$

e analogamente:

$$d\underline{A}_0 = \underline{v}_0 \times \underline{u}_0 \rightarrow dA_0 = d\underline{A}_0 \cdot \underline{n}_0 = (\underline{v}_0 \times \underline{u}_0) \cdot \underline{n}_0$$

Si osservi poi che $\underline{u}_0 = \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{u}$ e $\underline{v}_0 = \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{v}$; tralasciando i dettagli

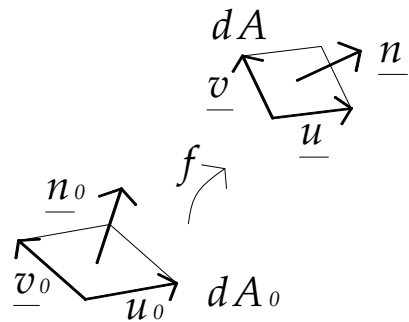
[si veda Malvern, 1969, pp. 169-170] si ha:

$$d\underline{A}_0 = \det \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot d\underline{A} \cdot \underline{\underline{F}}$$

ne risultano queste leggi di trasformazione:

$$d\underline{A} = \det \underline{\underline{F}} \cdot d\underline{A}_0 \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} \quad (\text{per le aree})$$

$$dV = \det \underline{\underline{F}} \cdot dV_0 \quad (\text{per i volumi})$$



cioè la risultante delle azioni superficiali su un'area infinitesima resta immutata quando la si riporta dalla configurazione attuale β a quella di riferimento β_0 .

Analogamente è possibile definire la misura di sforzo $\hat{\underline{\underline{S}}}$ associata a $\dot{\underline{\underline{E}}}$:

$$\int_{\beta} (\underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{D}}) dV = \int_{\beta_0} \left(\det \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \dot{\underline{\underline{E}}} \right) dV_0 = \int_{\beta_0} \left(\hat{\underline{\underline{S}}} \cdot \dot{\underline{\underline{E}}} \right) dV \quad (\text{IV.2.2.10})$$

$$\rightarrow \hat{\underline{\underline{S}}} = \det \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-T},$$

dove $\hat{\underline{\underline{S}}}$ è il tensore doppio simmetrico detto *secondo tensore di Piola-Kirchhoff*.

IV.3. Elementi finiti di trave – determinazione del carico critico

Si considera, in questo paragrafo, un elemento finito misto – ibrido a due campi basato sul principio variazionale di Hu-Washizu sviluppato per travi piane laminate.

La cinematica in deformazioni finite, con riferimento alla Figura IV.3.1, si scrive:

$$\begin{cases} s_z(y, z) = u_z(z) + y \sin(\varphi(z)) \\ s_y(y, z) = u_y(z) + y [1 - \cos(\varphi(z))] \end{cases} \quad (\text{IV.3.1})$$

dove $u_z(z)$, $u_y(z)$, $\varphi(z)$ sono rispettivamente lo spostamento longitudinale e trasversale dell'asse della trave e la rotazione della sezione retta.

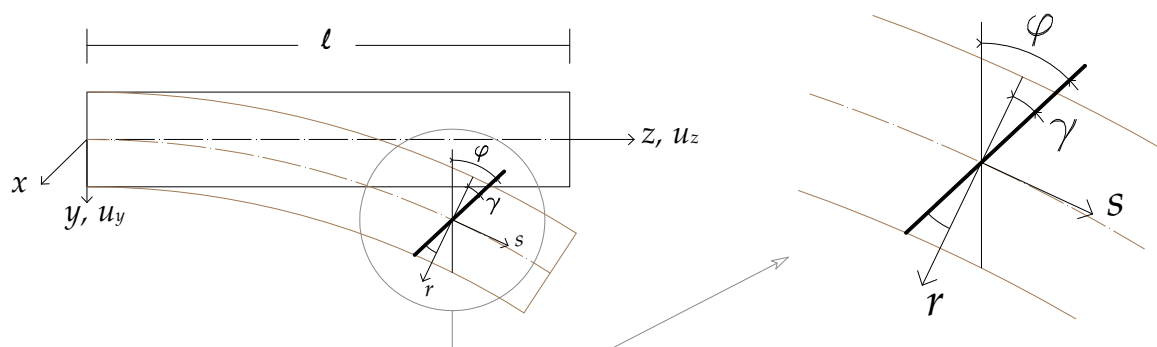


Figura IV.3.1: Cinematica della trave in deformazioni finite.

Per la determinazione del carico critico si adotta la teoria classica [si veda, *Corradi; 1992*] secondo la quale l'equilibrio si considera in configurazione deformata e si deve, in questo modo, tenere conto delle componenti del secondo ordine delle deformazioni.

Riconducendosi al caso semplice di spostamenti geometricamente piccoli, in virtù del quale si può considerare che $\sin \varphi \simeq \varphi$; $\cos \varphi \simeq 1$, le (IV.3.1) diventano:

$$\begin{cases} s_z(y, z) = u_z(z) + y\varphi(z) \\ s_y(y, z) = u_y(z), \end{cases} \quad (\text{IV.3.2})$$

e quindi, con le usuali semplificazioni proposte da *von Kármán*, le componenti non nulle del campo di deformazione risultano:

$$\begin{cases} \hat{\varepsilon}_{zz} = \frac{\partial s_z}{\partial z} = \frac{du_z^0(z)}{dz} + y \frac{d\varphi(z)}{dz} + \frac{1}{2} \left(\frac{du_y}{dz} \right)^2 = \varepsilon_0(z) + y\kappa(z) + \frac{1}{2} \left(\frac{du_y}{dz} \right)^2 & (a) \\ \hat{\gamma}_{zy} = \frac{\partial s_y}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial y} = \frac{du_y(z)}{dz} + \varphi(z) = \gamma(z), & (b) \end{cases} \quad (\text{IV.3.3})$$

dove le componenti generalizzate $\varepsilon_0(z)$, $\kappa(z)$ e $\gamma(z)$ sono rispettivamente la deformazione assiale, la curvatura e la deformazione media a taglio.

Si osservi che $\hat{\varepsilon}_{zz}$ differisce dalla corrispondente componente del tensore di deformazione infinitesima per il termine non lineare $(du_y/dz)^2$ che costituisce un contributo del secondo ordine, non trascurabile, per la ricerca del carico critico (una trattazione più completa della teoria di *von Kármán* per i casi di travi e piastre è riportata in Appendice B).

Come riportato nel Capitolo III, le equazioni che governano il problema della trave piana di Timoshenko possono essere dedotte dal principio variazionale di Hu-Washizu modificato, che nel caso specifico diventa:

$$\Pi_{\text{mod}}^{HW} = \Phi(\underline{\varepsilon}) - L_{\text{ext}}(\underline{v}) - \int_0^\ell \left(\underline{S}^T [\underline{\varepsilon} - L(\underline{v})] \right) dz, \quad (\text{IV.3.4})$$

dove $\underline{v} = \{u_z, u_y, \varphi\}^T$ è il vettore degli spostamenti generalizzati, $\underline{\varepsilon} = \{\varepsilon_0, \kappa, \gamma\}^T$ il vettore delle deformazioni generalizzate, $\underline{S} = \{N, M, T\}^T$ il vettore delle corrispondenti azioni interne (sforzo normale, momento flettente e taglio rispettivamente), Φ è l'energia di deformazione elastica mentre L_{ext} è il lavoro delle forze esterne.

Mentre i primi due termini della (IV.3.4) assumono lo stesso significato già discusso nel Capitolo III l'ultimo diventa:

$$\int_0^{\ell} \left(\underline{S}^T [\underline{\varepsilon} - L(\underline{v})] \right) dz = \int_0^{\ell} \left[N \left(\varepsilon_0 - \frac{du_z}{dz} - \frac{1}{2} \left(\frac{du_y}{dz} \right)^2 \right) + M \left(\kappa - \frac{d\varphi}{dz} \right) + T \left(\gamma - \frac{du_y}{dz} - \varphi \right) \right] dz, \quad (\text{IV.3.5})$$

dove, a differenza del caso già trattato nel Capitolo III, si nota che nella condizione di compatibilità imposta mediante l'azione assiale compare il termine non lineare del secondo ordine $(du_y/dz)^2$.

IV.3.1. Elemento misto – ibrido ottimale a due nodi

Si considera come primo caso quello dell'elemento misto – ibrido ottimale (si veda Capitolo II) a 2 nodi in cui il numero dei parametri di deformazione è pari al numero dei gradi di libertà dell'elemento al quale va sottratto il numero dei moti rigidi.

I campi delle componenti generalizzate di deformazione vengono interpolati come segue:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \beta_1 \\ \kappa &= \beta_2 + z\beta_3. \end{aligned} \quad (\text{IV.3.1.1})$$

A livello locale le deformazioni normali e le corrispettive tensioni, dedotte con l'ausilio delle equazioni costitutive si scrivono, nel caso più semplice della trave omogenea:

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_0 + y\kappa = \beta_1 + y(\beta_2 + z\beta_3) \rightarrow \sigma_{zz} = E\varepsilon_{zz} = E(\beta_1 + y(\beta_2 + z\beta_3)). \quad (\text{IV.3.1.2})$$

Per la terza equazione locale di equilibrio si ha:

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0 \rightarrow \tau_{zy} = C + \int_{-h/2}^y -\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dy = \int_{-h/2}^y -E(y\beta_3) dy, \quad (\text{IV.3.1.3})$$

quindi, analogamente a quanto riportato nel Capitolo III, si trova:

$$\begin{cases} T = \int_A \tau_{zy} dA = EJ\beta_3 \\ \frac{1}{2} GA_s y^2 = \frac{1}{2} \int_A \frac{\tau_{zy}^2}{G_i} dA = \frac{bh^5}{120} \frac{E^2}{G} \beta_3^2. \end{cases} \quad (\text{IV.3.1.4})$$

I campi di spostamento sono invece modellati con le usuali funzioni lineari di interpolazione per elementi isoparametrici Lagrangiani a 2 nodi (Figura IV.3.1.1).

$$\begin{cases} u_z = L_{a1}u_{z1} + L_{a2}u_{z2} \\ u_y = L_{a1}u_{y1} + L_{a2}u_{y2} \\ \varphi = L_{a1}\varphi_1 + L_{a2}\varphi_2 \end{cases} \quad L_{a1} = \frac{(1-\xi)}{2}; \quad L_{a2} = \frac{(1+\xi)}{2}. \quad (\text{IV.3.1.5})$$

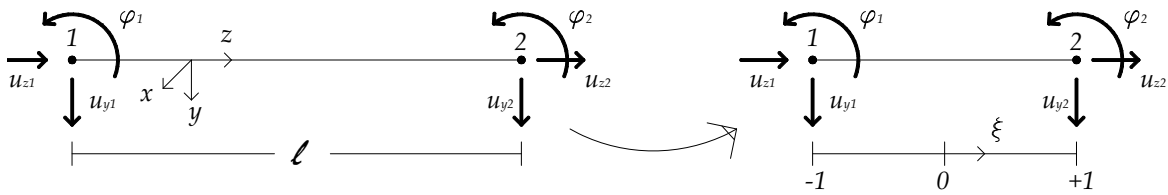


Figura IV.3.1.1: Modello agli elementi finiti per la trave di Timoshenko, elemento a 2 nodi.

Discretizzando il funzionale di Hu-Washizu modificato (Eq. IV.3.4) si può quindi scrivere:

$$\Pi_{\text{mod}}^{HW} = -\frac{1}{2} \underline{\beta}^T \underline{H}_{\beta\beta} \underline{\beta} + \underline{\beta}^T \underline{G} \underline{q} - \underline{Q}^T \underline{q} + \left[\frac{1}{2} \int_0^\ell N \left(\frac{du_y}{dz} \right)^2 dz \right], \quad (\text{IV.3.1.6})$$

dove $\underline{q} = [u_{z1}, u_{y1}, \varphi_1, u_{z2}, u_{y2}, \varphi_2]$ rappresenta il vettore degli spostamenti nodali mentre $\underline{\beta} = [\beta_1, \beta_2, \beta_3]$ costituisce il vettore dei parametri di deformazione.

Considerando i prime tre termini e imponendo le condizioni di stazionarietà rispetto ai parametri di deformazione $\underline{\beta}$ e a quelli cinematici \underline{q} si ottengono le equazioni di compatibilità e di equilibrio:

$$\begin{cases} -\underline{H} \underline{\beta} + \underline{G} \underline{q} = \underline{0} \\ \underline{G}^T \underline{\beta} = \underline{Q} \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} -\underline{H} & \underline{G} \\ \underline{G}^T & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\beta} \\ \underline{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{Q} \end{bmatrix}, \quad (\text{IV.3.1.7})$$

Infine, se si condensano staticamente i parametri $\underline{\beta}$, si determina la matrice di rigidezza *elastica* del singolo elemento finito:

$$\begin{cases} \underline{\beta} = \underline{H}^{-1} \underline{G} \underline{q} \\ \underline{G}^T \underline{H}^{-1} \underline{G} \underline{q} = \underline{Q} \rightarrow \underline{K}_e \underline{q} = \underline{Q} \end{cases} \quad (\text{IV.3.1.8})$$

La matrice di rigidezza *geometrica* si ottiene invece dall'ultimo termine della (IV.3.1.6) e risulta:

$$\left[\frac{1}{2} \int_0^\ell N \left(\frac{du_y}{dz} \right)^2 dz \right] \rightarrow \underline{\underline{K}}_g = N \begin{matrix} \begin{matrix} u_{z1} & u_{y1} & \varphi_1 & u_{z2} & u_{y2} & \varphi_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} u_{z1} \\ u_{y1} \\ \varphi_1 \\ u_{z2} \\ u_{y2} \\ \varphi_2 \end{matrix} \quad (\text{IV.3.1.9})$$

Al fine di arricchire l'approssimazione del campo di spostamenti è possibile modellare lo spostamento trasversale all'asse della trave u_y con funzioni di forma Hermitiane e conservare, invece, lo stesso grado di approssimazione (Lagrangiano lineare) per lo spostamento parallelo all'asse della trave u_z :

$$\begin{cases} u_z = L_{a1}u_{z1} + L_{a2}u_{z2} \\ u_y = H_1u_{y1} + H_2u_{y2} + H_3u_{y1}' + H_4u_{y2}' \end{cases} \quad (\text{IV.3.1.10})$$

Con questa approssimazione, applicando la stessa procedura descritta nelle equazioni (IV.3.1.6-9) si ottengono le matrici di rigidezza *elastica* $\underline{\underline{K}}_e$ e *geometrica* $\underline{\underline{K}}_g$; quest'ultima nel caso specifico è così determinata:

$$\left[\frac{1}{2} \int_0^\ell N \left(\frac{du_y}{dz} \right)^2 dz \right] \rightarrow \underline{\underline{K}}_g = N \begin{matrix} \begin{matrix} u_{z1} & u_{y1} & \varphi_1 & u_{z2} & u_{y2} & \varphi_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{36}{30L} & \frac{3}{30L} & 0 & -\frac{36}{30L} & -\frac{3}{30L} \\ 0 & \frac{3}{30L} & \frac{4L}{30} & 0 & \frac{3}{30L} & -\frac{L}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{36}{30L} & \frac{3}{30L} & 0 & \frac{36}{30L} & -\frac{3}{30L} \\ 0 & -\frac{3}{30L} & -\frac{L}{30} & 0 & \frac{3}{30L} & \frac{4L}{30} \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} u_{z1} \\ u_{y1} \\ \varphi_1 \\ u_{z2} \\ u_{y2} \\ \varphi_2 \end{matrix} \quad (\text{IV.3.1.11})$$

IV.3.2. Elemento misto – ibrido ottimale a tre nodi

Si considera ora il caso dell'elemento a 3 nodi. Se si sceglie un'interpolazione dei campi generalizzati di deformazione di tipo lineare per la parte assiale e cubica per la curvatura si trova:

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 &= \beta_1 + z\beta_2 \\ \kappa &= \beta_3 + z\beta_4 + z^2\beta_5 + z^3\beta_6.\end{aligned}\quad (\text{IV.3.2.1})$$

Procedendo analogamente a quanto illustrato nel paragrafo IV.3.1 le tensioni normali si possono scrivere, nel caso più semplice della trave omogenea:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{zz} &= \varepsilon_0 + y\kappa = (\beta_1 + z\beta_2) + y(\beta_3 + z\beta_4 + z^2\beta_5 + z^3\beta_6) \\ \rightarrow \sigma_{zz} &= E\varepsilon_{zz} = E\left((\beta_1 + z\beta_2) + y(\beta_3 + z\beta_4 + z^2\beta_5 + z^3\beta_6)\right).\end{aligned}\quad (\text{IV.3.2.2})$$

Se, per rispettare le equazioni di equilibrio in termini di risultanti, si trascura il contributo fornito da β_2 , si ottiene:

$$\tau_{zy} = C + \int_{-h/2}^y -\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dy = \int_{-h/2}^y -E\left[y(\beta_4 + 2z\beta_5 + 3z^2\beta_6)\right] dy, \quad (\text{IV.3.2.3})$$

e quindi:

$$\begin{cases} T = \int_A \tau_{zyi} dA = EJ(\beta_4 + 2z\beta_5 + 3z^2\beta_6) \\ \frac{1}{2} GA_s \gamma^2 = \frac{1}{2} \int_A \frac{\tau_{zyi}^2}{G_i} dA = \frac{bh^5}{120} \frac{E^2}{G} (\beta_4 + 2z\beta_5 + 3z^2\beta_6)^2. \end{cases} \quad (\text{IV.3.2.4})$$

In questo caso i campi di spostamento vengono modellati con le usuali funzioni paraboliche di interpolazione per elementi isoparametrici Lagrangiani a 3 nodi (Figura III.2.2.1).

$$\begin{cases} u_z = L_{a1}u_{z1} + L_{a2}u_{z2} + L_{a3}u_{z3} \\ u_y = L_{a1}u_{y1} + L_{a2}u_{y2} + L_{a3}u_{y3} \\ \varphi = L_{a1}\varphi_1 + L_{a2}\varphi_2 + L_{a3}\varphi_3 \end{cases} \quad L_{a1} = \frac{-\xi(1-\xi)}{2}; \quad L_{a2} = (1-\xi^2); \quad L_{a3} = \frac{\xi(1+\xi)}{2}, \quad (\text{IV.3.2.5})$$

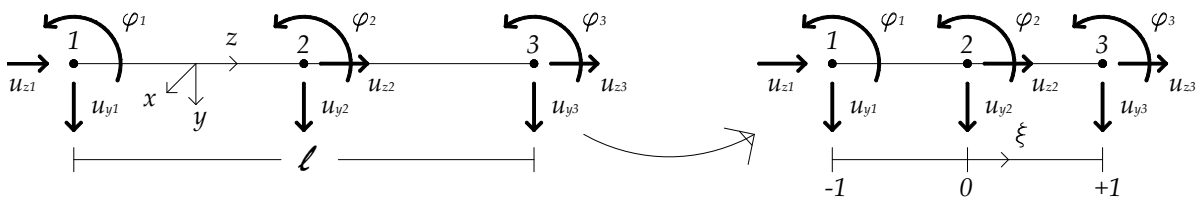


Figura IV.3.2.1: Modello agli elementi finiti per la trave di Timoshenko, elemento a 3 nodi.

Procedendo alla discretizzazione del funzionale di Hu-Washizu modificato si ha:

$$\Pi_{\text{mod}}^{HW} = -\frac{1}{2} \underline{\beta}^T \underline{H}_{\beta\beta} \underline{\beta} + \underline{\beta}^T \underline{G} \underline{q} - \underline{Q}^T \underline{q} + \left[\frac{1}{2} \int_0^\ell N \left(\frac{du_y}{dz} \right)^2 dz \right], \quad (\text{IV.3.2.6})$$

dove $\underline{q} = [u_{z1}, u_{y1}, \varphi_1, u_{z2}, u_{y2}, \varphi_2, u_{z3}, u_{y3}, \varphi_3]$ rappresenta il vettore degli spostamenti nodali mentre $\underline{\beta} = [\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6]$ il vettore dei parametri di deformazione. Nel caso semplice della trave omogenea i termini dell'equazione (IV.3.2.6) sono rispettivamente:

$$\begin{aligned} \underline{\beta}^T \underline{H}_{\beta\beta} \underline{\beta} &= z \int_0^\ell \left[EA (\beta_1 + z\beta_2)^2 + EJ (\beta_3 + z\beta_4 + z^2\beta_5 + z^3\beta_6)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{bh^5}{120} \frac{E^2}{G} (\beta_4 + 2z\beta_5 + 3z^2\beta_6)^2 \right] dz \\ \underline{\beta}^T \underline{G} \underline{q} &= \int_0^\ell \left[EA (\beta_1 + z\beta_2) \left(\frac{du_z}{dz} \right) + EJ (\beta_3 + z\beta_4 + z^2\beta_5 + z^3\beta_6) \left(\frac{d\varphi}{dz} \right) \right. \\ &\quad \left. + EJ (\beta_4 + 2z\beta_5 + 3z^2\beta_6) \left(\frac{du_y}{dz} + \varphi \right) \right] dz \\ \underline{Q}^T \underline{q} &= \int_0^\ell (q_z u_z + q_y u_y + m\varphi) dz \end{aligned} \quad (\text{IV.3.2.7})$$

Imponendo la stazionarietà rispetto ai parametri di deformazione $\underline{\beta}$ e a quelli cinematici \underline{q} e procedendo come al solito con la condensazione statica dei parametri $\underline{\beta}$ si determina la matrice di rigidezza *elastica* del singolo elemento finito:

$$\begin{cases} \underline{\beta} = \underline{H}^{-1} \underline{G} \underline{q} \\ \underline{G}^T \underline{H}^{-1} \underline{G} \underline{q} = \underline{Q} \rightarrow \underline{K}_e \underline{q} = \underline{Q} \end{cases} \quad (\text{IV.3.2.8})$$

Anche in questo caso la matrice di rigidezza *geometrica* si ottiene dall'ultimo termine della (IV.3.2.6) tramite la quale è poi possibile determinare il carico critico [‡] e la deformata critica del caso in esame.

‡ La determinazione del carico critico si avvale della risoluzione del noto problema agli autovalori di seguito riportato:

$$\det \left[\underline{K}_e - \lambda \underline{K}_g \right] = 0$$

Come ben noto agli autovalori sono associati i carichi critici, ai relativi autovettori le deformate critiche. Una trattazione più completa è riportata in Appendice B.

Più precisamente la matrice di rigidezza *geometrica* risulta:

$$\left[\frac{1}{2} \int_0^{\ell} N \left(\frac{du_y}{dz} \right)^2 dz \right] \rightarrow \underline{\underline{K}}_g = N \quad (IV.3.2.9)$$

$$\begin{bmatrix} u_{z1} & u_{y1} & \varphi_1 & u_{z2} & u_{y2} & \varphi_2 & u_{z3} & u_{y3} & \varphi_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{3L} & 0 & 0 & \frac{1}{3L} & 0 & 0 & -\frac{8}{3L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3L} & 0 & 0 & \frac{7}{3L} & 0 & 0 & -\frac{8}{3L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{8}{3L} & 0 & 0 & -\frac{8}{3L} & 0 & 0 & \frac{16}{3L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_{z1} \\ u_{y1} \\ \varphi_1 \\ u_{z2} \\ u_{y2} \\ \varphi_2 \\ u_{z3} \\ u_{y3} \\ \varphi_3 \end{matrix}$$

IV.2.3. Test numerici per travi omogenee

- Carico critico per trave a mensola, omogenea, sottile ($s/L=0.02$) Figura IV.2.3.1. In Tabella IV.2.3.1 e in Figura IV.2.3.2 si riportano in forma adimensionale i *test* di convergenza al raffinamento della *mesh* con riferimento alla soluzione analitica [si veda *Corradi; 1992*].

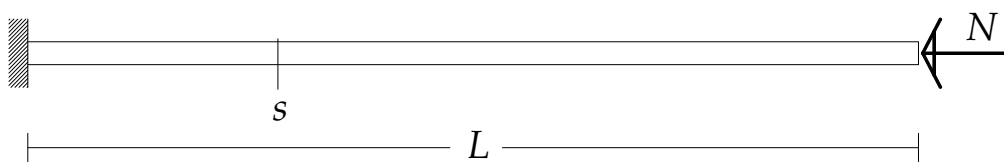


Figura IV.2.3.1: Trave a mensola omogenea sottile ($s/L=0.02$).

# di el.	Lagrangiano a 2 nodi	Lagrangiano a 3 nodi	Hermitiano a 2 nodi
1	1.2158	1.0075	1.0075
2	1.0524	1.0005	1.0005
4	1.0129	1.0000	1.0000
8	1.0032	1.0000	1.0000
16	1.0008	1.0000	1.0000

Tabella IV.2.3.1: Convergenza per trave a mensola modellata con elementi misto –ibridi a 2 e 3 nodi ed Hermitiani a 2 nodi ($s/L=0.02$). Risultati normalizzati al valore esatto per trave di Eulero-Bernoulli.

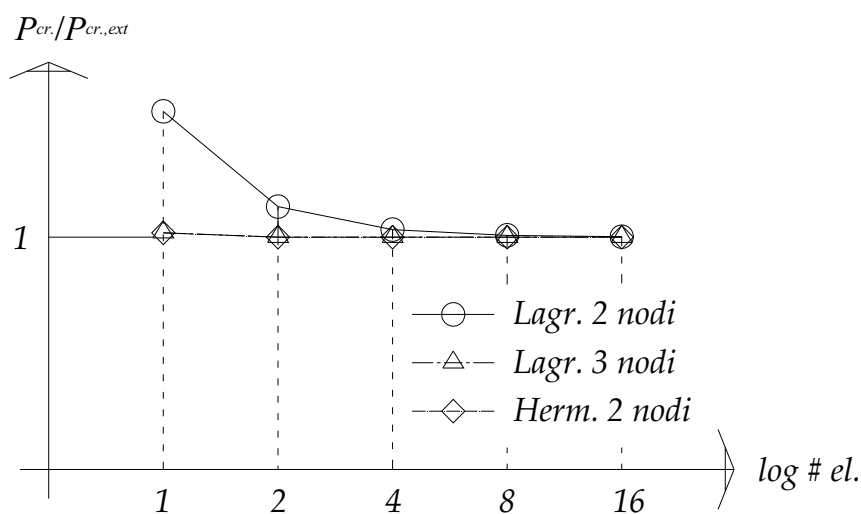


Figura IV.2.3.2: Curve di convergenza adimensionali in carico critico ($s/L=0.02$).

- Carico critico per trave a mensola, omogenea, spessa ($s/L=0.25$) Figura IV.2.3.3. In Tabella IV.2.3.2 e in Figura IV.2.3.4 si riportano in forma adimensionale i test di convergenza al raffinarsi della *mesh* con riferimento alla soluzione analitica [si veda *Corradi; 1992*].

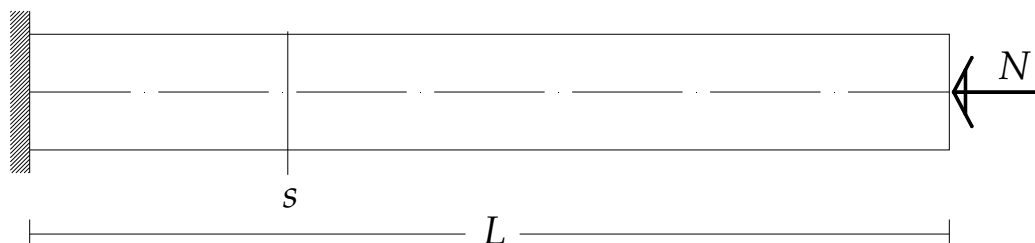


Figura IV.2.3.3: Trave a mensola omogenea spessa ($s/L=0.25$).

# di el.	Lagrangiano a 2 nodi	Lagrangiano a 3 nodi
1	1.2058	1.0072
2	1.0503	1.0005
4	1.0124	1.0000
8	1.0031	1.0000
16	1.0008	1.0000

Tabella IV.2.3.2: Convergenza per trave a mensola modellata con elementi misto –ibridi a 2 e 3 nodi ($s/L=0.25$). Risultati normalizzati al valore esatto per trave di Timoshenko.

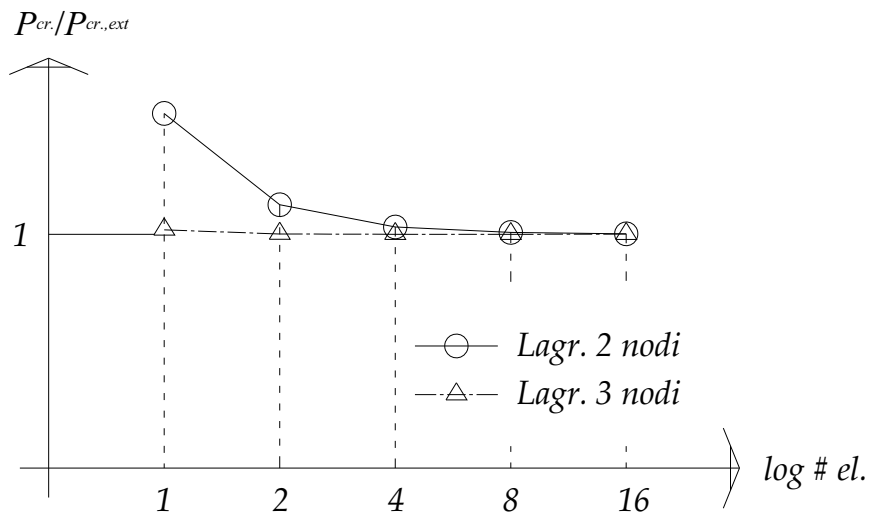


Figura IV.2.3.4: Curve di convergenza adimensionali in carico critico ($s/L=0.25$).

- Carico critico per trave appoggiata, omogenea, sottile ($s/L=0.02$) Figura IV.2.3.5. In Tabella IV.2.3.3 e in Figura IV.2.3.6 si riportano in forma adimensionale i *test* di convergenza al raffinarsi della *mesh* con riferimento alla soluzione analitica [si veda *Corradi; 1992*].

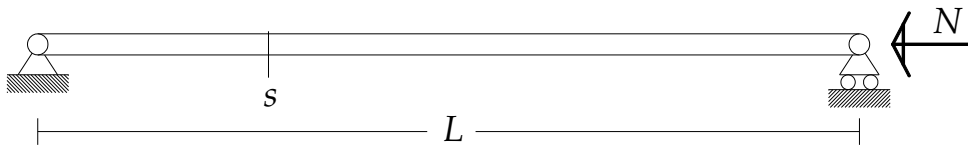


Figura IV.2.3.5: Trave appoggiata omogenea sottile ($s/L=0.02$).

# di el.	Lagrangiano a 2 nodi	Lagrangiano a 3 nodi	Hermitiano a 2 nodi
1	-	1.0132	1.2171
2	1.2156	1.0075	1.0076
4	1.0523	1.0005	1.0005
8	1.0129	1.0000	1.0000
16	1.0032	1.0000	1.0000

Tabella IV.2.3.3: Convergenza per la trave appoggiata modellata con elementi misto-ibridi a 2 e 3 nodi ed Hermitiani a 2 nodi ($s/L=0.02$). Risultati normalizzati al valore esatto per trave di Eulero-Bernoulli.

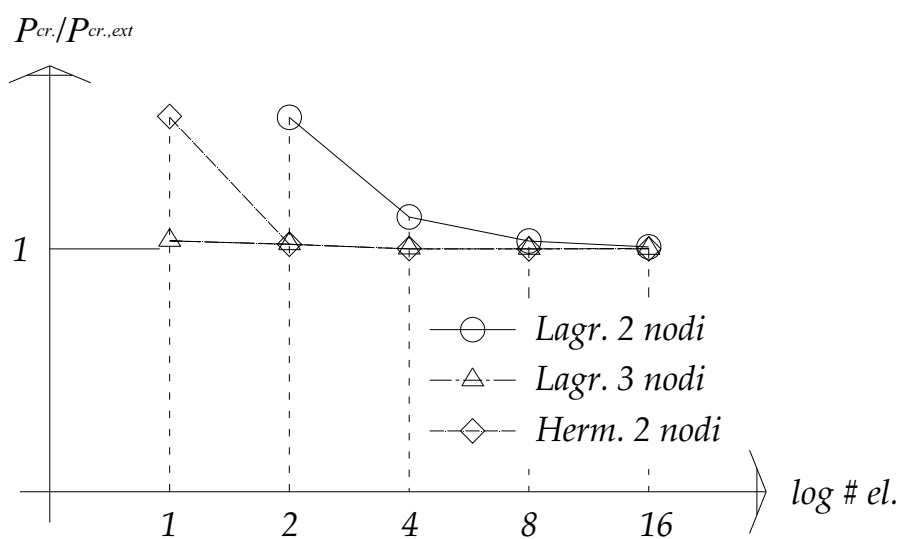


Figura IV.2.3.6: Curve di convergenza adimensionali in carico critico ($s/L=0.02$).

- Carico critico per trave appoggiata, omogenea, spessa ($s/L=0.25$). In Tabella IV.2.3.4 e in Figura IV.2.3.7 si riportano in forma adimensionale i *test* di convergenza al raffinarsi della *mesh* con riferimento alla soluzione analitica [si veda Corradi; 1992].

# di el.	Lagrangiano a 2 nodi	Lagrangiano a 3 nodi
1	-	1.0114
2	1.1806	1.0065
4	1.0448	1.0004
8	1.0111	1.0000
16	1.0028	1.0000

Tabella IV.2.3.4: Convergenza per trave a mensola modellata con elementi misto – ibridi a 2 e 3 nodi ($s/L=0.25$). Risultati normalizzati al valore esatto per la trave di Timoshenko.

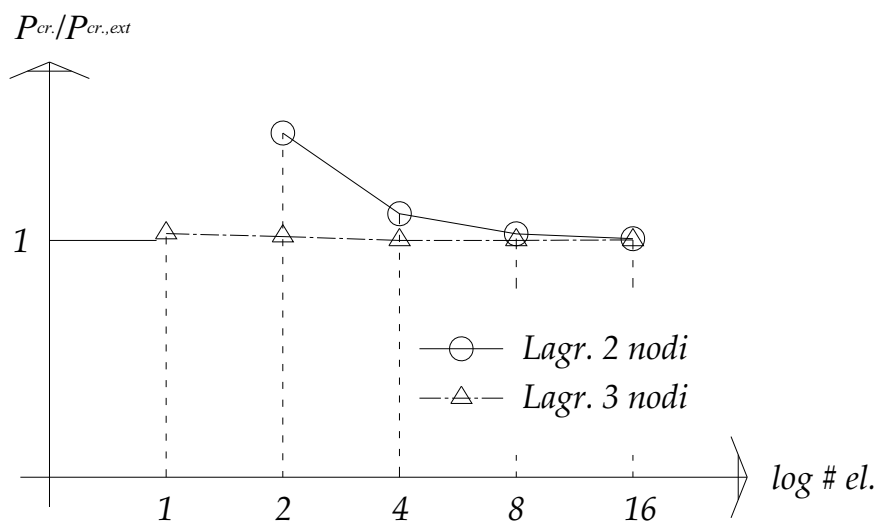


Figura IV.2.3.7: Curve di convergenza adimensionali in carico critico ($s/L=0.25$).

IV.2.4. Test numerici per travi laminate

Si considerano ora travi laminate multistrato, in particolare il caso della trave a mensola di Figura IV.2.4.1 per diversi valori dello spessore. In Tabella IV.2.4.1 e in Tabella IV.2.4.2 si riportano rispettivamente i *test* di convergenza per travi snelle ($s/L=0.01$) e moderatamente spesse ($s/L=0.05$) per vari schemi di laminazione al raffinarsi della mesh riferiti alle soluzioni di letteratura [Reddy, 2004].

I parametri meccanici del materiale sono:

$$\frac{E_x}{E_y} = 25; \quad G_{xy} = G_{xz} = 0.5E_y; \quad G_{yz} = 0.2E_y; \quad \nu_{xy} = 0.25;$$

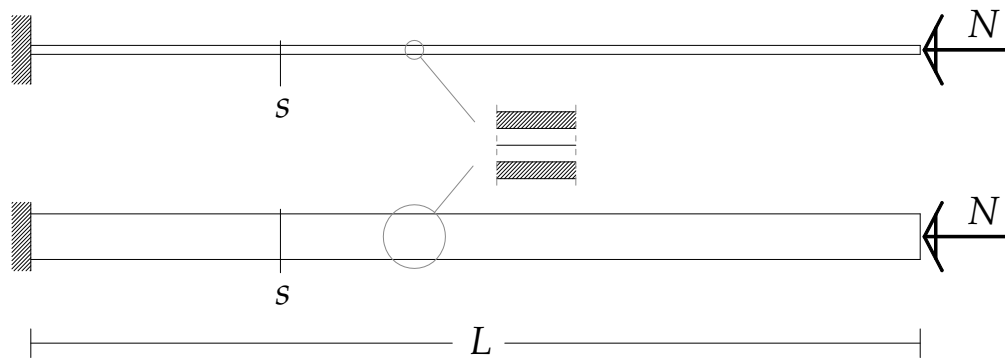


Figura IV.2.4.1: Trave a mensola laminata.

Lamin.	0	90	(0/90) _s	(90/0) _s	0	90	(0/90) _s	(90/0) _s
# di el.	Lagrangiano a 2 nodi				Lagrangiano a 3 nodi			
1	1.0511	1.0511	1.0139	1.0131	1.0072	1.0076	1.0068	1.0060
2	1.0010	1.0010	0.9998	0.9990	1.0005	1.0005	0.9998	0.9990
4	1.0001	1.0001	0.9988	0.9982	1.0000	1.0000	0.9993	0.9985
8	1.0000	1.0000	0.9987	0.9981	1.0000	1.0000	0.9993	0.9985
16	1.0000	1.0000	0.9987	0.9981	1.0000	1.0000	0.9993	0.9985

Tabella IV.2.4.1: Convergenza per la trave a mensola laminata snella, modellata con elementi misto – ibridi lagrangiani a 2 e 3 nodi ($s/L=0.01$). Risultati normalizzati al valore esatto [Reddy; 2004].

Lamin.	0	90	(0/90) _s	0	90	(0/90) _s
# di el.	Lagrangiano a 2 nodi			Lagrangiano a 3 nodi		
1	1.0126	1.0161	1.0313	1.0072	1.0073	1.0118
2	1.0035	1.0020	1.0147	1.0004	1.0003	1.0048
4	1.0024	1.0010	1.0126	1.0000	0.9999	1.0043
8	1.0022	1.0005	1.0123	1.0000	0.9999	1.0043
16	1.0021	1.0003	1.0122	1.0000	0.9999	1.0042

Tabella IV.2.4.2: Convergenza per la trave a mensola laminata moderatamente spessa, modellata con elementi misto – ibridi lagrangiani a 2 e 3 nodi ($s/L=0.05$). Risultati normalizzati al valore esatto [Reddy; 2004].

IV.4. Elementi finiti di lastra-piastra – determinazione del carico critico

In questo paragrafo si considera un elemento finito misto – ibrido a due campi basato sul principio variazionale di Hu-Washizu modificato per piastre piane laminate nell'ambito del modello cinematico noto come *FSDT*.

La piastra laminata che viene considerata (Figura IV.4.1.) è sottile o moderatamente spessa, composta da k strati (*layers*) aventi differenti caratteristiche meccaniche ed occupa il volume β_e così definito:

$$\beta_e = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in [-h/2, +h/2], (x, y) \in \bar{\beta}_e \subset \mathbb{R}^2 \right\}. \quad (\text{IV.4.1})$$

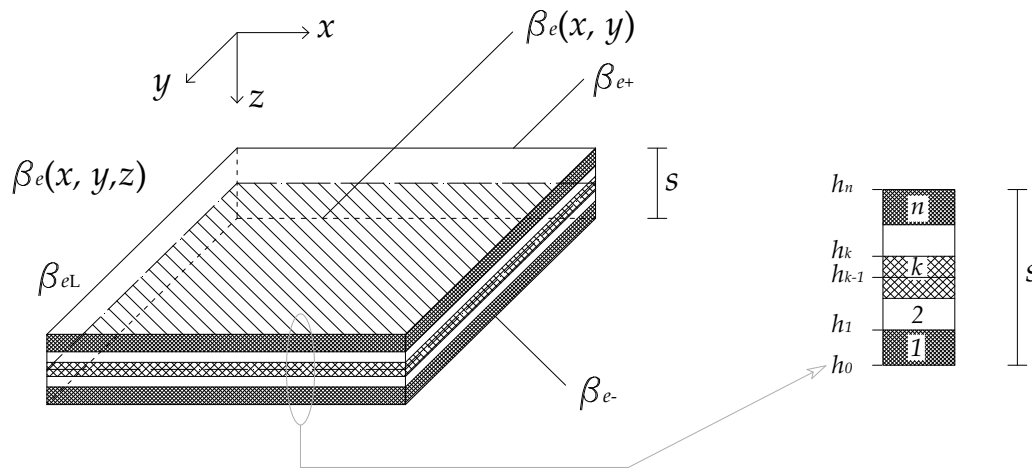


Figura IV.4.1: Piastra tipo in materiale composito laminato.

Nell'ipotesi di perfetta aderenza tra gli strati e di conservazione delle sezioni piane ortogonali al piano medio nella configurazione indeformata, le componenti del campo di spostamenti si possono scrivere come:

$$\begin{cases} s_x(x, y, z) = u_x(x, y) - z \cdot \varphi_x(x, y) \\ s_y(x, y, z) = u_y(x, y) - z \cdot \varphi_y(x, y), \\ s_z(x, y, z) = u_z(x, y), \end{cases} \quad (\text{IV.4.2})$$

dove u_x , u_y e u_z rappresentano gli spostamenti del piano medio, φ_x e φ_y sono le rotazioni delle fibre normali al piano medio. Le componenti di deformazione nel piano, come già proposto nel Capitolo III, si possono scrivere:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}(x, y, z) &= \varepsilon_{xx}^0(x, y) + z \bar{\varepsilon}_{xx}(x, y) \\ \varepsilon_{yy}(x, y, z) &= \varepsilon_{yy}^0(x, y) + z \bar{\varepsilon}_{yy}(x, y) \\ \varepsilon_{xy}(x, y, z) &= \varepsilon_{xy}^0(x, y) + z \bar{\varepsilon}_{xy}(x, y), \end{aligned} \quad (\text{IV.4.3})$$

e, come di consueto, sono esprimibili come somma di un contributo estensionale ε_{ij}^0 , e di uno flessionale $\bar{\varepsilon}_{ij}$.

Introducendo le equazioni costitutive ed imponendole a livello locale per la k -esima lamina si determinano le componenti di tensione nel piano e quindi secondo la procedura riportata nelle equazioni (III.3.3-5) è possibile determinare le restanti componenti di deformazione tagliante fuori dal piano.

Ancora una volta tutte le equazioni che governano il problema possono essere dedotte dal principio variazionale di Hu-Washizu modificato, che in questo caso si specializza così:

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{mod}}^{HW}(\varepsilon_{ij}, s_i) = & -\frac{1}{2} \int_{\beta_e} (C_{ijmn} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{mn}) dV + \int_{\beta_e} [(C_{ijmn} \varepsilon_{mn,j} - B_i) s_i] dV \\ & + \int_{\beta_e} \left(\frac{1}{2} \sigma_{ij}^0 s_{l,i} s_{l,j} \right) dV + \int_{\partial\beta_e} [(C_{ijmn} \varepsilon_{mn} n_j) \bar{s}_i] dA + L_{\text{ext}}, \end{aligned} \quad (\text{IV.4.4})$$

dove C_{ijkl} , ε_{ij} , B_i , \bar{s}_i e s_i sono rispettivamente il tensore costitutivo, il tensore di deformazione infinitesima, le forze di volume (che verranno poi assunte nulle), gli spostamenti imposti sul contorno e i campi di spostamento nei punti interni del solido. Nel caso di piastre laminate ed in assenza di forze di volume il funzionale (IV.4.10) diventa:

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{HW,mod}}^{H,e}(\varepsilon_{ij}, s_i, \bar{s}_i) = & -\sum_{k=1}^K \left[\frac{1}{2} \int_{\beta_e} \int_{h_{k-1}}^{h_k} C_{ijmn}^k \varepsilon_{ij}^k \varepsilon_{mn}^k dz dA + \int_{\beta_e} \int_{h_{k-1}}^{h_k} C_{ijmn}^k \varepsilon_{mn,j}^k s_i dz dA \right. \\ & \left. + \int_{\beta_e} \int_{h_{k-1}}^{h_k} C_{ijmn}^k \varepsilon_{mn}^k n_j \bar{s}_i dz dl + \frac{1}{2} \int_{\beta_e} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{ij}^{0k} s_{l,i} s_{l,i} dz dA \right]. \end{aligned} \quad (\text{IV.4.5})$$

Mentre i primi tre integrali della (IV.4.5) assumono lo stesso significato già discusso nel Capitolo III l'ultimo fornisce la matrice di rigidità geometrica, \underline{K}_g :

$$\frac{1}{2} \left[\underline{q}^T \underline{NK} \underline{q} \right] = \sum_{k=1}^K \left[\frac{1}{2} \int_{\beta_e} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{ij}^{0k} s_{l,i} s_{l,i} dz dA \right]. \quad (\text{IV.4.6})$$

IV.4.1. Elemento misto – ibrido ottimale a quattro nodi

Sempre nelle ipotesi di impiego di elementi ottimali, i parametri di deformazione che si possono utilizzare risultano in tutto 14. In questo caso, per lastre-piastre rettangolari, l'interpolazione dei campi di deformazione estensionali e flessionali si scrive come:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^{0k} &= \alpha_1 + \alpha_2 y & \varepsilon_{yy}^{0k} &= \beta_1 + \beta_2 x & 2\varepsilon_{xy}^{0k} &= \gamma_1 \\ \varepsilon_{xx}^{-k} &= \alpha_3 + \alpha_4 x + \alpha_5 y & \varepsilon_{yy}^{-k} &= \beta_3 + \beta_4 x + \beta_5 y & 2\varepsilon_{xy}^{-k} &= \gamma_2 + \gamma_3 x^2 + \gamma_4 y^2 \end{aligned} \quad (\text{IV.4.1.1})$$

Le altre componenti di deformazione sono valutate tramite la procedura descritta in precedenza nelle equazioni (IV.4.2–5) e risulta indipendente dal numero di lamine.

Per gli usuali elementi isoparametrici Lagrangiani a 4 nodi (Figura IV.4.1.1.)

l'interpolazione dei campi di spostamento si scrive:

$$\begin{cases} u_x = La_1 u_{x1} + La_2 u_{x2} + La_3 u_{x3} + La_4 u_{x4} \\ u_y = La_1 u_{y1} + La_2 u_{y2} + La_3 u_{y3} + La_4 u_{y4} \\ u_z = La_1 u_{z1} + La_2 u_{z2} + La_3 u_{z3} + La_4 u_{z4} \\ \varphi_x = La_1 \varphi_{x1} + La_2 \varphi_{x2} + La_3 \varphi_{x3} + La_4 \varphi_{x4} \\ \varphi_y = La_1 \varphi_{y1} + La_2 \varphi_{y2} + La_3 \varphi_{y3} + La_4 \varphi_{y4} \end{cases} \quad La_i(\xi, \eta) = \frac{(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)}{4} \quad (\text{IV.4.1.2})$$

$$\rightarrow \begin{cases} s_x = \sum_{i=1}^4 La_i u_{xi} - z \sum_{i=1}^4 La_i \varphi_{xi} \\ s_y = \sum_{i=1}^4 La_i u_{yi} - z \sum_{i=1}^4 La_i \varphi_{yi} \\ s_z = u_z = \sum_{i=1}^4 La_i u_{zi} \end{cases}$$

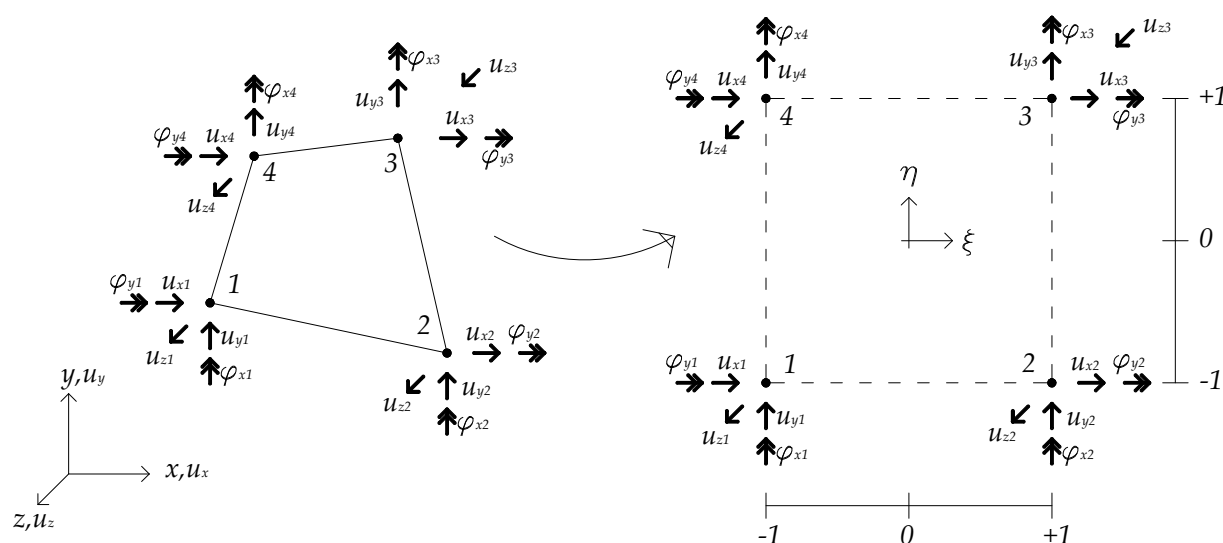


Figura IV.4.1.1: Modello agli elementi finiti per lastre-piastre di Reissner-Mindlin, elemento a 4 nodi.

Procedendo alla discretizzazione del funzionale di Hu-Washizu modificato si ha:

$$\Pi_{\text{mod}}^{HW} = -\frac{1}{2} \underline{\beta}^T \underline{H}_{\beta\beta} \underline{\beta} + \underline{\beta}^T \underline{G} \underline{q} - \underline{Q}^T \underline{q} + \underline{N} \cdot \underline{K}_{\underline{G}} \underline{q}, \quad (\text{IV.4.1.3})$$

dove $\underline{q} = [u_{x1}, u_{y1}, u_{z1}, \varphi_{x1}, \varphi_{y1}, \dots, \varphi_{y4}]$ rappresenta il vettore degli spostamenti nodali mentre $\underline{\beta} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \gamma_4]$ è il vettore dei parametri di deformazione.

L'ultimo termine $\underline{N} \cdot \underline{K}_{\underline{G}}$ rappresenta il contributo dato dalle deformazioni del secondo ordine ed è formato da tre contributi:

$$\begin{aligned} a) \quad N_{xx} \cdot K_{G_1} &= \sum_{k=1}^K \left[\frac{1}{2} \int_{\beta_e} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{xx}^{0k} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 dz dA \right] \\ b) \quad N_{yy} \cdot K_{G_2} &= \sum_{k=1}^K \left[\frac{1}{2} \int_{\beta_e} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{yy}^{0k} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 dz dA \right] \\ c) \quad N_{xy} \cdot K_{G_3} &= \sum_{k=1}^K \left[\frac{1}{2} \int_{\beta_e} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{xy}^{0k} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) dz dA \right] \end{aligned} \quad (\text{IV.4.1.4})$$

che rappresenta la matrice geometrica dell'elemento lastra-piastra.

Se si considerano soltanto i primi tre termini della (IV.4.1.3) e si impone la stazionarietà rispetto ai parametri di deformazione $\underline{\beta}$ e a quelli cinematici \underline{q} , procedendo usualmente con la condensazione statica dei parametri $\underline{\beta}$ si determina la matrice di rigidezza *elastica* del singolo elemento finito:

$$\begin{cases} \underline{G}^T \underline{H}^{-1} \underline{G} \underline{q} = \underline{Q} \rightarrow \underline{K}_e \underline{q} = \underline{Q} \\ \underline{\beta} = \underline{H}^{-1} \underline{G} \underline{q} \end{cases} \quad (\text{IV.4.1.4})$$

Ancora una volta grazie alle matrici di rigidezza elastica \underline{K}_e e geometrica \underline{K}_g è possibile determinare il carico critico e la deformata critica [‡].

‡ La determinazione del carico critico si avvale della risoluzione del noto problema agli autovalori di seguito riportato:

$$\det \left[\underline{K}_e - \lambda \underline{K}_g \right] = 0.$$

Come è ben noto agli autovalori sono associati i carichi critici, ai relativi autovettori le deformate critiche. Una trattazione più completa è riportata in Appendice B.

IV.4.2. Test numerici per piastre omogenee sottili

- Carico critico per piastra omogenea quadrata appoggiata soggetta a compressione uniassiale (CS) (Figura IV.4.2.1). In Tabella IV.4.2.1 e in Figura IV.4.2.2 si riportano, in forma adimensionale, i *test* di convergenza corrispondenti al progressivo raffinamento della *mesh* (Figura IV.4.2.1) con riferimento alla soluzione analitica relativa al primo carico critico [si veda *Corradi; 1994*].

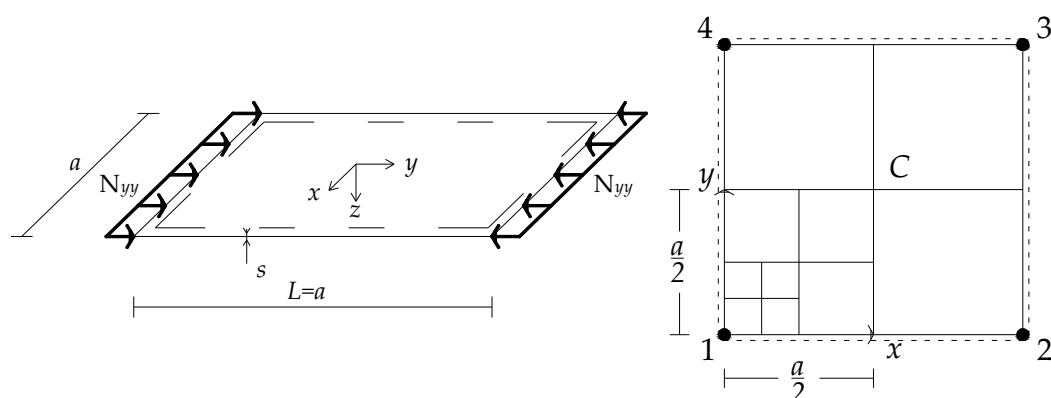


Figura IV.4.2.1: Piastra omogenea sottile quadrata soggetta a compressione uniassiale (CS).

Mesh	Piastra quadrata (CS)					
	El. HM	err %	Straus7 [†]	err %	Pro-Sap [†]	err %
2x2	1.0052	0.52	0.6121	38.79	1.0502	5.02
4x4	0.9630	3.70	0.9028	9.72	1.0732	7.32
8x8	0.9712	2.88	0.9745	2.55	1.0208	2.08

Tabella IV.4.2.1: Convergenza per la piastra quadrata semplicemente appoggiata modellata con elementi misto-ibridi a 4 nodi e rapporto $s/L=0.025$.

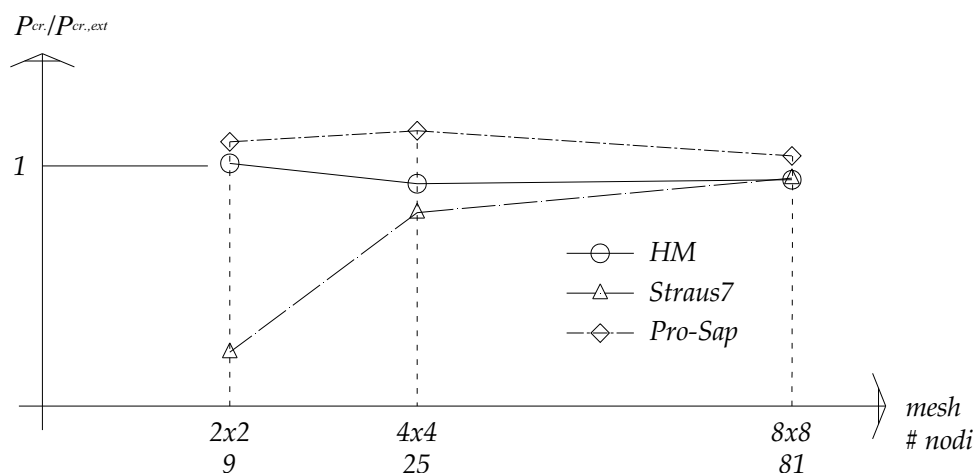


Figura IV.4.2.2: Curve di convergenza adimensionali per il carico critico ($s/L=0.025$). Si osservi che la convergenza è monotona soltanto per il programma *Straus7* che ha implementati elementi finiti agli spostamenti, *Pro-Sap* (che ha implementato l'elemento finito di Ibrahimbegovic) e il modello ibrido - misto non garantiscono, come noto, una convergenza monotona.

In Figura IV.3.2.3 si riporta il primo modo critico per l'elemento proposto.

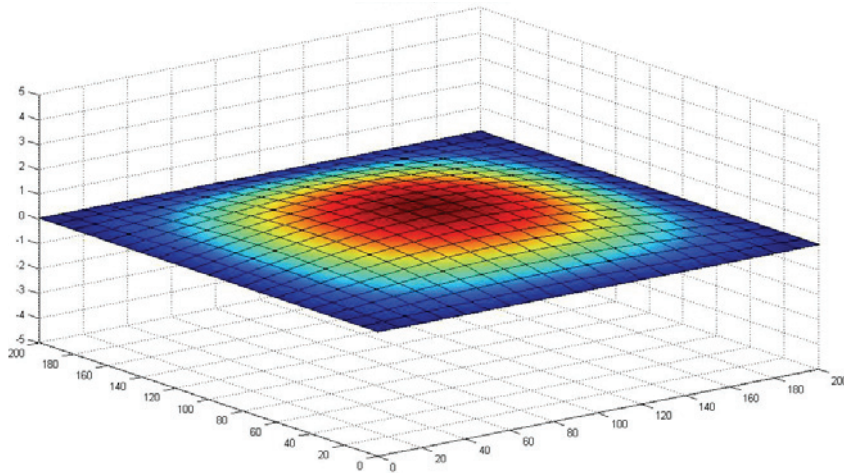


Figura IV.4.2.3: Primo modo critico per piastra omogenea sottile quadrata soggetta a CS.

- Carico critico per piastra omogenea rettangolare ($L/a = 2$) appoggiata e soggetta a compressione uniassiale (CS) (Figura IV.4.2.4). In Tabella IV.4.2.2 e in Figura IV.4.2.5 si riportano i *test* di convergenza all'aumentare della suddivisione del reticolo (Figura IV.4.2.4) con riferimento alla soluzione analitica [Corradi; 1994].

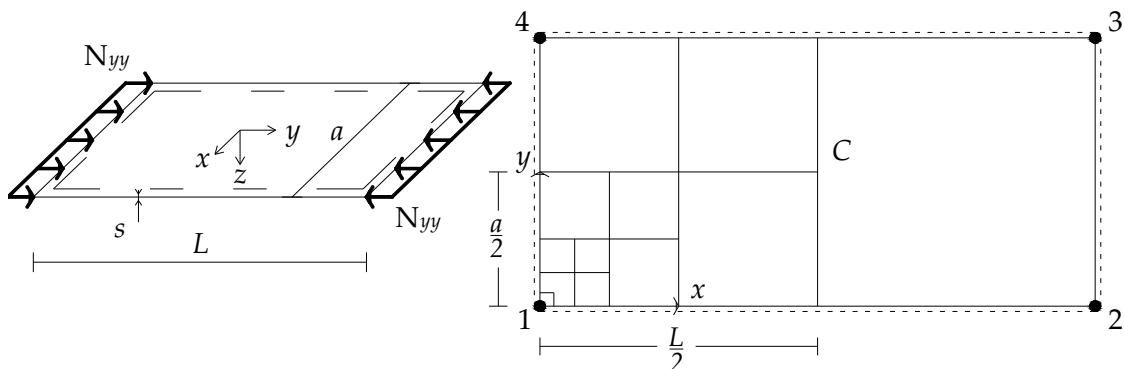


Figura IV.4.3.4: Piastra omogenea sottile rettangolare soggetta a compressione uniassiale (CS).

Mesh	Piastra rettangolare (CS)					
	El. HM	err %	Straus7 [†]	err %	Pro-Sap [‡]	err %
2x4	0.9580	4.20	0.6683	33.17	1.1426	14.26
4x8	0.9603	3.97	0.9035	9.65	1.0844	8.44
10x20	0.9976	0.24	0.9799	2.01	1.0108	1.08

Tabella IV.4.2.2: Convergenza per la piastra rettangolare semplicemente appoggiata modellata con elementi misto -ibridi a 4 nodi e rapporto $s/L=0.025$. Una suddivisione meno fitta di quelle proposte fornisce risultati inattendibili per l'assenza di sufficienti gradi di libertà traslazionali [si veda Corradi, 1994 pag. 284].

[†] Straus7 ver. 2.3.6: Codice agli elementi finiti commerciale, sviluppato e distribuito da Strand7.

[‡] Pro-Sap: Codice FEM commerciale, sviluppato da ALGOR-SUPERSAP e distribuito in Italia da 2S.I.

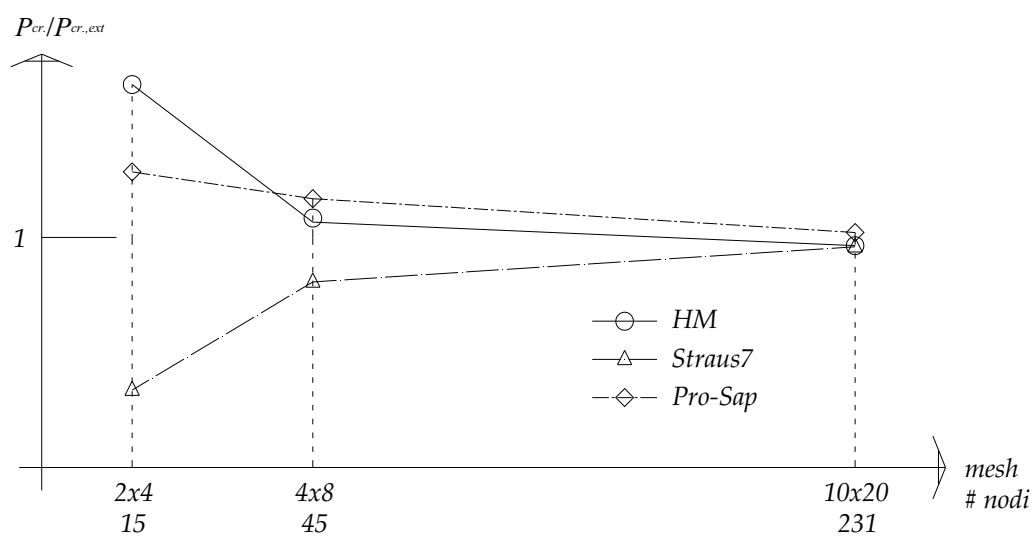


Figura IV.4.2.5: Curve di convergenza adimensionali in carico critico ($s/L=0.025$).

In Figura IV.4.2.6 si riporta il primo modo critico per l'elemento proposto.

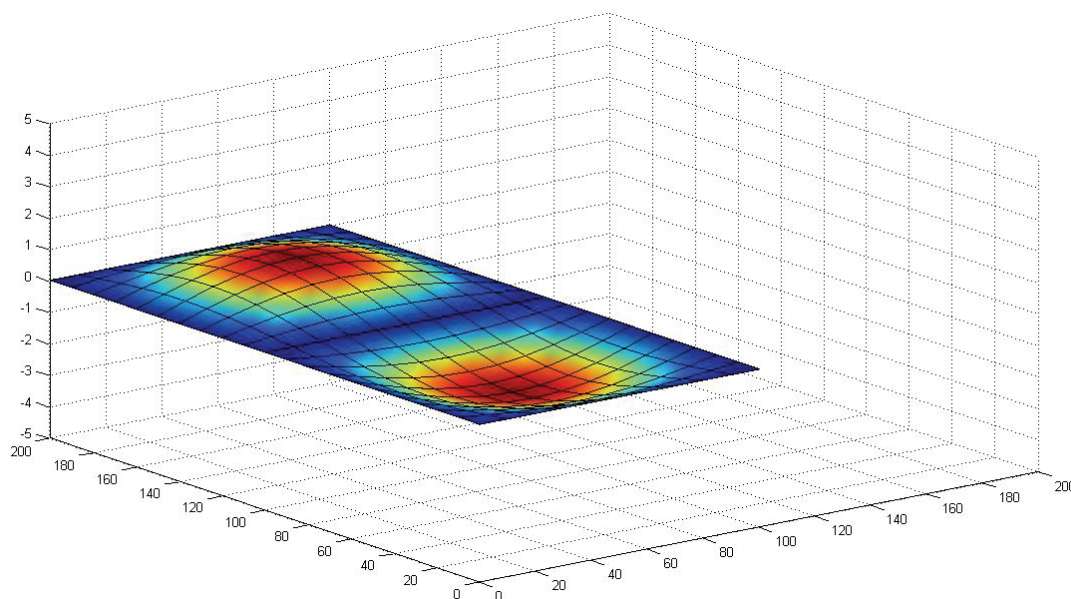


Figura IV.4.2.6: Primo modo critico per piastra omogenea sottile rettangolare soggetta a CS.

† Straus7 ver. 2.3.6: Codice agli elementi finiti commerciale, sviluppato e distribuito da Strand7.

‡ Pro-Sap: Codice FEM commerciale, sviluppato da ALGOR-SUPERSAP e distribuito in Italia da 2S.I.

- Carico critico per piastra omogenea quadrata appoggiata soggetta ad azioni taglianti al bordo (SS, equivalenti a una compressione diagonale), (Figura IV.4.2.7). In Tabella IV.4.2.3 e in Figura IV.4.2.8. si riportano i *test* di convergenza all'aumentare del raffinamento della *mesh* (Figura IV.4.2.7) alla soluzione analitica corrispondente al primo modo [si veda *Corradi; 1994*].

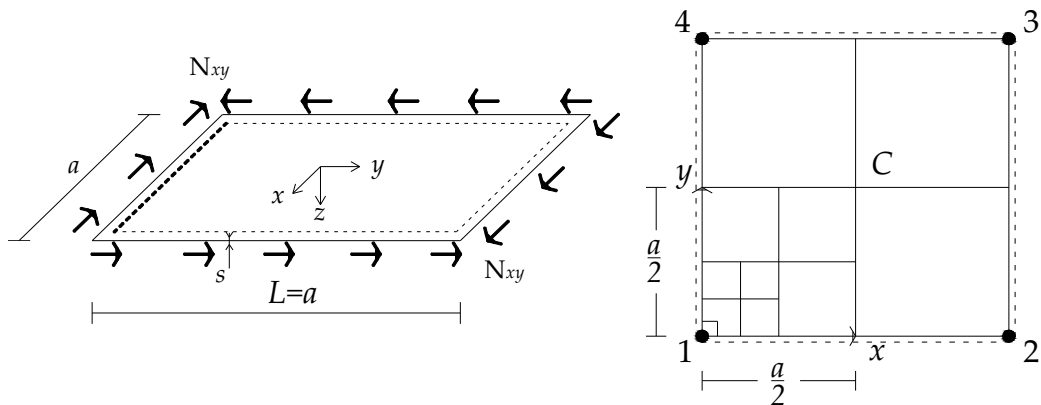


Figura IV.4.2.7: Piastra omogenea sottile soggetta a stress do taglio (SS).

Mesh	Piastra quadrata (SS)			
	El. HM	err %	Straus7 [†]	err %
4x4	1.3326	33.26	0.7779	22.21
8x8	1.0335	3.35	0.9347	6.53
20x20	0.9823	1.77	0.9873	1.53

Tabella IV.4.2.3: Convergenza per la piastra semplicemente appoggiata modellata con elementi misto -ibridi a 4 nodi e rapporto $s/L=0.025$.

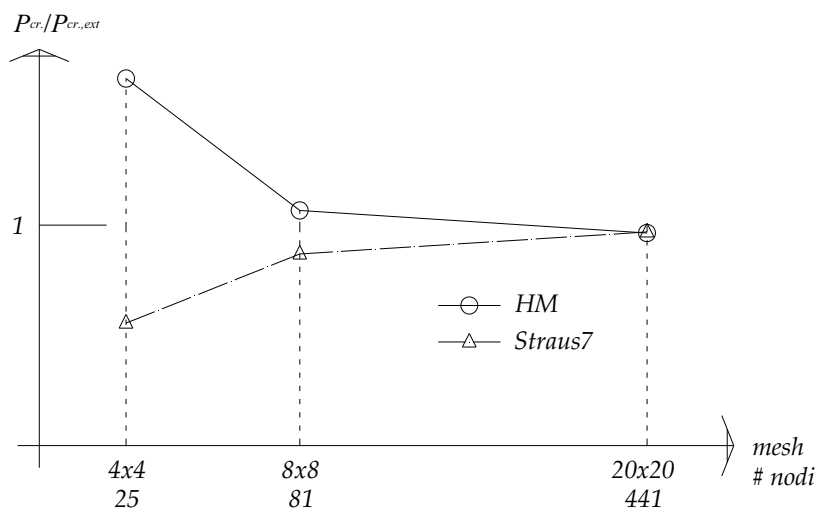


Figura IV.4.2.8: Curve di convergenza adimensionali in termini di carico critico ($s/L=0.025$).

[†] Straus7 ver. 2.3.6: Codice agli elementi finiti commerciale, sviluppato e distribuito da Strand7.

In Figura IV.4.2.9 si riporta il primo modo critico per l'elemento proposto.

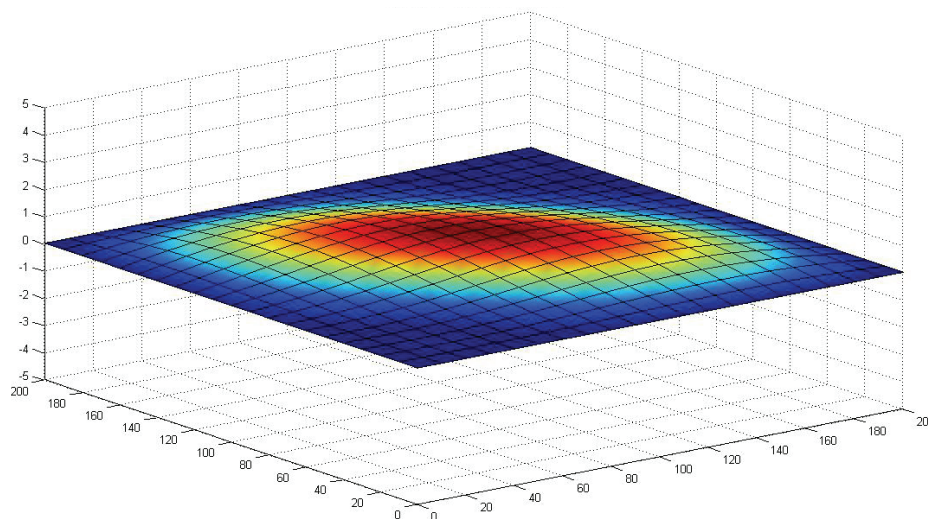


Figura IV.4.2.9: Primo modo critico per piastra omogenea sottile quadrata soggetta a SS.

IV.4.3. Test numerici per piastre omogenee moderatamente spesse

Carico critico per piastra moderatamente spessa, omogenea, quadrata, appoggiata e soggetta a compressione uniassiale (CS) (Figura IV.4.3.1). In Tabella IV.4.3.1 si riportano i *test* di convergenza al crescere della suddivisione del reticolo (Figura IV.4.3.1) alle soluzioni di letteratura [Brunelle e Robinson, 1976; Reddy e Phan, 1985; Doong, 1987; Matsunaga, 1994].

I dati di riferimento sono: $\nu=0.3$; $s/L=0.10$.

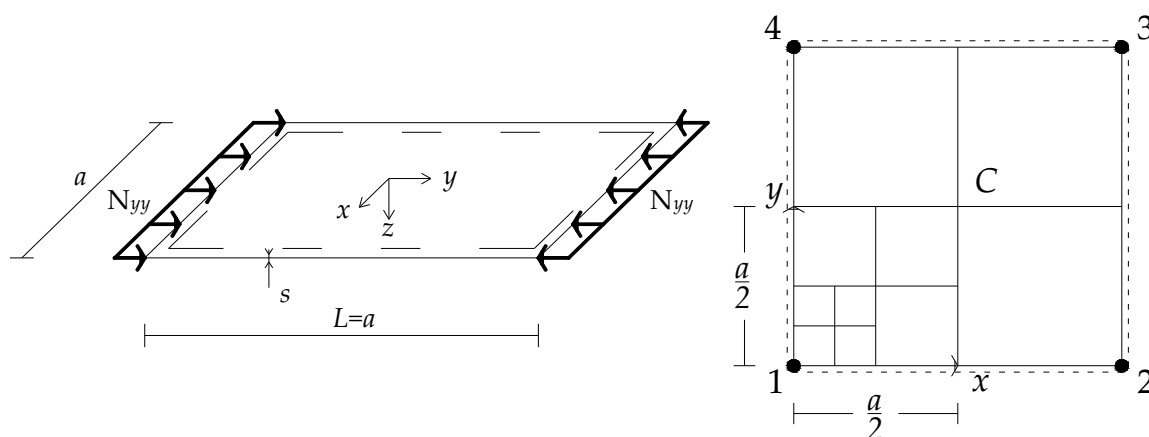


Figura IV.4.3.1: Piastra omogenea moderatamente spessa, quadrata soggetta a (CS).

Mesh	El. HM	Soluzioni di riferimento [‡]:	
2 x 2	4.9415	<i>Brunelle e Robinson (1976)</i>	3.729
4 x 4	3.9300	<i>Reddy e Phan (1985)</i>	3.787
8 x 8	3.7625	<i>Doong (1987)</i>	3.730
10 x 10	3.7324	<i>Matsunaga (1994)</i>	3.771

Tabella IV.4.3.1: Convergenza alle soluzioni di letteratura per la piastra moderatamente spessa ($s/L=0.10$), quadrata, semplicemente appoggiata soggetta a compressione uniassiale e modellata con elementi misto-ibridi a 4 nodi. Risultati normalizzati rispetto

al coefficiente $D \frac{\pi}{L^2}$, dove: $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$.

IV.4.4. Test numerici per piastre laminate moderatamente spesse

- Carico critico per piastra moderatamente spessa, laminata, quadrata, appoggiata e soggetta a compressione uniassiale (CS) (Figura IV.4.4.1). In Tabella IV.4.4.1 si riportano i *test* di convergenza al diminuire delle dimensioni della maglia (Figura IV.4.4.1) alle soluzioni di letteratura [*Reddy, 2004*].

Parametri meccanici del materiale:

$$\frac{E_x}{E_y} = 25; \quad G_{xy} = G_{xz} = 0.5E_y; \quad G_{yz} = 0.2E_y; \quad \nu_{xy} = 0.25; \quad \frac{L}{h} = 10; \quad \frac{L}{a} = 1;$$

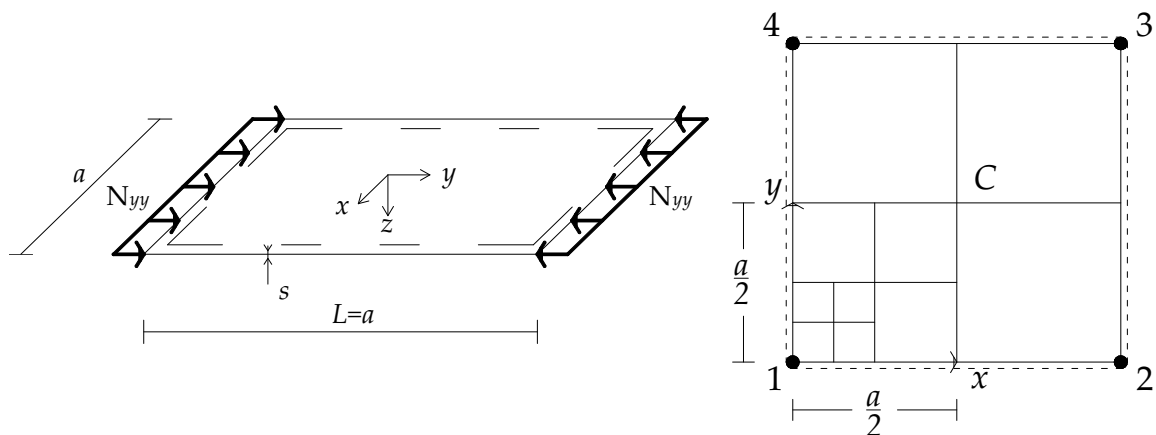


Figura IV.4.4.1: Piastra laminata moderatamente spessa, quadrata soggetta a (CS).

‡ Alcune delle soluzioni di riferimento sono ottenute con ipotesi di tipo *HSDT* e non *FSDT* per quanto riguarda la cinematica della sezione.

<i>mesh</i>	El. HM	<i>Reddy (2004)</i>
2 x 2	13.1620	
4 x 4	9.4971	
8 x 8	7.8019	
10 x 10	7.4016	
<i>soluzione rif.</i>	—	7.1240

Tabella IV.4.4.1: Convergenza per la piastra moderatamente spessa, laminata, semplicemente appoggiata e soggetta a CS. Risultati normalizzati rispetto al coefficiente $\bar{N} = N_0 L^2 / (\pi^2 D_{yy})$.

In Figura IV.4.4.2 si riporta il primo modo critico per l'elemento proposto.

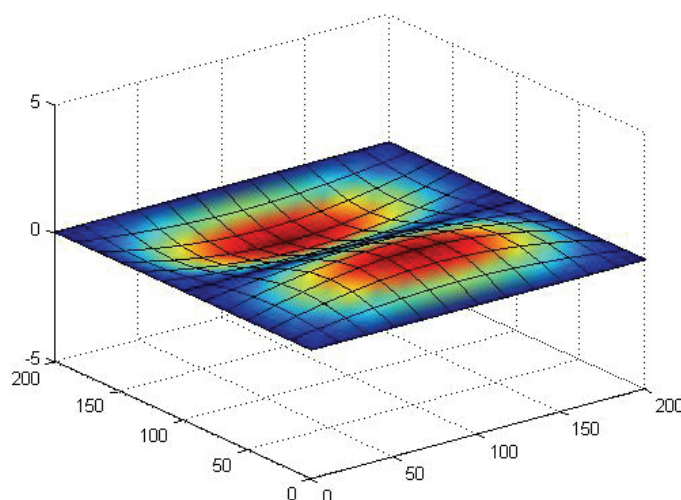


Figura IV.4.4.2: Primo modo critico per piastra laminata, moderatamente spessa, quadrata in (CS).

- Carico critico per piastra moderatamente spessa, laminata, appoggiata su due lati opposti e soggetta a compressione uniassiale (CS) (Figura IV.4.4.2). In Tabella IV.4.4.2 sono riportati i *test* di convergenza all'aumentare del raffinamento della *mesh* alle soluzioni di letteratura [Reddy, 2004] per le quattro differenti tipologie di laminazione già considerate per il caso delle travi laminate.

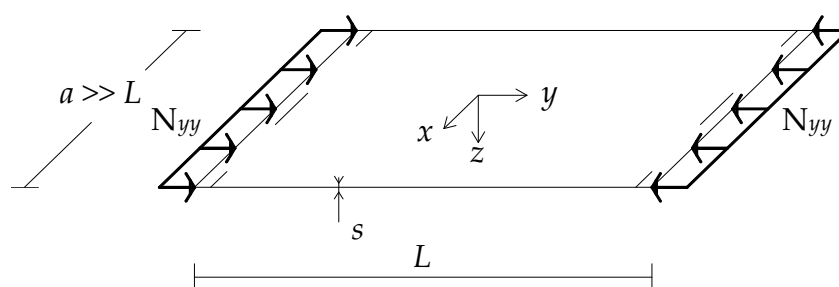


Figura IV.4.4.2: Piastra laminata moderatamente spessa, semplicemente appoggiata e soggetta a (CS).

Lamin.	0	90	(0/90) _s	(90/0) _s
<i>mesh</i>	—	—	—	—
1 x 2	1.0578	1.0352	1.0771	1.0130
1 x 4	1.0204	0.9964	1.0390	0.9760
1 x 8	1.0021	0.9867	1.0229	0.9666
1 x 10	0.9923	0.9854	1.0156	0.9639

Tabella IV.4.4.2: Convergenza per la piastra moderatamente spessa, laminata, appoggiata su due lati opposti e soggetta a CS. Risultati normalizzati rispetto al coefficiente $\bar{N} = N_0 L^2 / (E_y s^3)$.

Si osservi che la *mesh* è composta da un solo elemento in direzione x e da una discretizzazione crescente in direzione y .

Questa scelta è motivata dal fatto che avendo $a \gg L$ ogni piano normale all'asse coordinato x è un piano di simmetria per la lastra-piastra e quindi, se si tiene conto dei vincoli di simmetria, è possibile ricondursi allo studio di una sola striscia.

IV.4.5 Carico critico di travi e lastre-piastre – conclusioni

I *test* numerici presentati per la determinazione dei carichi e dei modi critici di travi e lastre-piastre evidenziano una buona convergenza alle soluzioni in forma chiusa o di altri autori.

Ancora una volta la formulazione adottata è tale per cui non è necessario introdurre a priori il fattore di correzione a taglio e consente di evitare il fenomeno dello *shear-locking*. La derivazione della matrice di rigidità geometrica sia per gli elementi di trave che di lastra-piastra è molto semplice e poco onerosa dal punto di vista computazionale e fornisce risultati soddisfacenti.

IV.5. Delaminazione secondo il modo I di travi piane laminate

Come si è già discusso in precedenza i materiali compositi laminati trovano largo impiego in diversi campi dell'ingegneria. Le loro caratteristiche di leggerezza e robustezza li rendono adatti a molteplici applicazioni come, ad esempio, carlinghe di aerei, scafi di imbarcazioni e, più di recente, fibro-rinforzi per travi e piastre.

Oltre ai già discussi problemi di stabilità dell'equilibrio questi materiali sono anche soggetti a fenomeni, legati alle loro modalità costruttive, di delaminazione che si manifesta con un distacco tra le lamine del composito e, di norma, caratterizza la matrice, di solito in resina sintetica, che costituisce il collante tra i vari strati o *layer* (Figura IV.5.1).

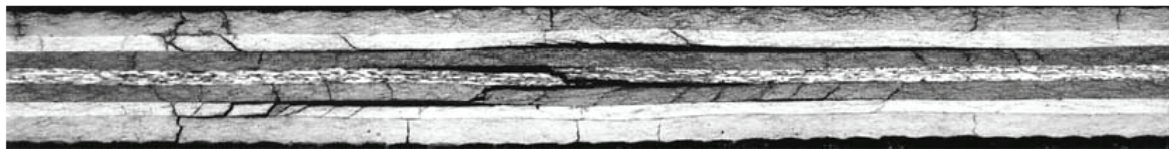


Figura IV.5.1: Delaminazione per rottura della matrice.

La presenza di un certo numero di lamine in materiale, anche ortotropo, ad alte prestazioni meccaniche uniti da uno strato molto sottile in resina ha suggerito, per lo studio della delaminazione, di impiegare una *mesh* di elementi finiti per ogni *layer* e l'utilizzo di elementi di interfaccia o di molle non lineari per lo strato di collante.

Questo approccio, detto *multilayer*, è chiaramente molto oneroso dal punto di vista computazionale. In questo paragrafo viene proposto un elemento finito misto - ibrido per travi deformabili a taglio che al proprio interno sia in grado di condensare tutte le informazioni relative al multistrato e che sia capace di suddividersi in due o più elementi in seguito al fenomeno della delaminazione (in Appendice C si riporta una breve trattazione del fenomeno di distacco di una lamina elastica da una superficie rigida).

IV.5.1. Modellazione dell'interfaccia

Al fine di modellare la delaminazione si deve considerare, nella formulazione di elemento, la quota parte di energia legata alla frattura dello strato di resina.

Per fare ciò, come ampiamente utilizzato in letteratura [Qui e al., 2001; Caporale e al, 2006] è possibile inserire a partire dall'apice della fessura (*crack tip*), elementi capaci di simulare il fenomeno della decoesione grazie ai quali si può tener conto dell'energia di frattura. In particolare si utilizzeranno *molle non lineari* ed *elementi finiti di interfaccia*: in entrambi i casi l'energia di frattura viene tenuta in conto nella formalizzazione di elemento. Tuttavia, mentre i primi la localizzano in modo puntuale, i secondi prevedono una distribuzione omogenea dell'energia di frattura nella zona di processo. Considerando per primo il caso delle molle non lineari occorre tener conto di un nuovo termine che entra nella definizione del potenziale elastico Φ , in particolare si scrive:

$$\Phi(\underline{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \int_0^\ell (EA\varepsilon_0^2 + EJ\kappa^2 + GA_s\gamma^2) dz + \frac{1}{2} \int_0^\ell (k_y \delta u_y^2 + k_z \delta u_z^2) dz, \quad (\text{IV.5.1.1})$$

nella (IV.5.1.1) il primo integrale rappresenta l'energia di deformazione associata alle deformazioni generalizzate (assiale, flessionale e di taglio) e ha lo stesso significato già visto in precedenza, il secondo integrale, invece, rappresenta il contributo in termini energetici dell'interfaccia costituita dalle molle.

I valori di k_y e k_z rappresentano, rispettivamente, le rigidità delle molle non lineari che descrivono l'interfaccia nei confronti della traslazione verticale e orizzontale (Figura IV.5.1.1).

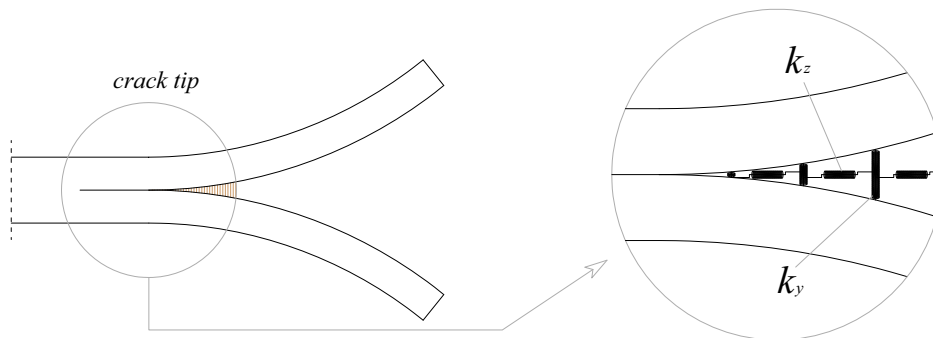


Figura IV.5.1.1: Rappresentazione schematica delle molle non lineari.

Esplicitando i termini di salto dei campi di spostamento assiale e trasversale (discontinui in presenza della fessura) il secondo integrale della (IV.5.1.1) diventa:

$$\frac{1}{2} \int_0^\ell \left[k_y (u_{y,\text{sup}} - u_{y,\text{inf}})^2 + k_z (u_{z,\text{sup}} - u_{z,\text{inf}})^2 \right] dz. \quad (\text{IV.5.1.2})$$

Il comportamento non lineare delle molle può essere modellato attraverso una curva carico-spostamento ($Q-v$), che per semplicità si assume bi-lineare, del tipo riportato in Figura IV.5.1.2.

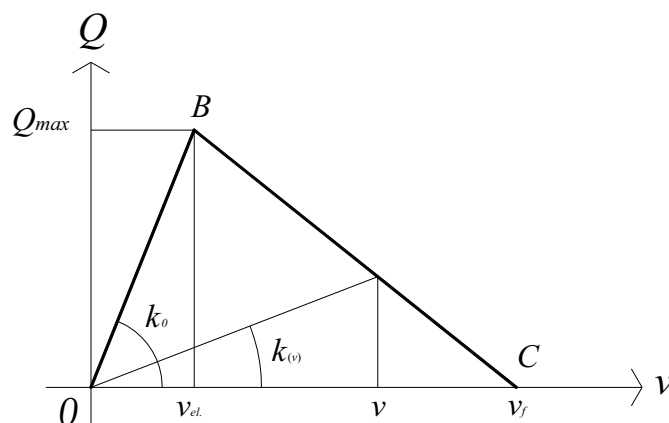


Figura IV.5.1.2: Curva carico-spostamento tipo per molle non lineari.

In Figura IV.5.1.2 il segmento OB rappresenta il tratto a comportamento elastico lineare delle molle non lineari, BC , invece, è il ramo a comportamento *softening* (rigidezza negativa) e fisicamente rappresenta la propagazione della frattura.

Gli elementi finiti di interfaccia, invece, possono essere interpretati come la naturale estensione delle molle non lineari, che interessano i soli nodi, all'intera superficie fessurata. In particolare sono stati proposti [Qui e al., 2001] elementi di interfaccia monodimensionali e di superficie rispettivamente per i casi bidimensionali e tridimensionali. (Figura IV.5.1.3).

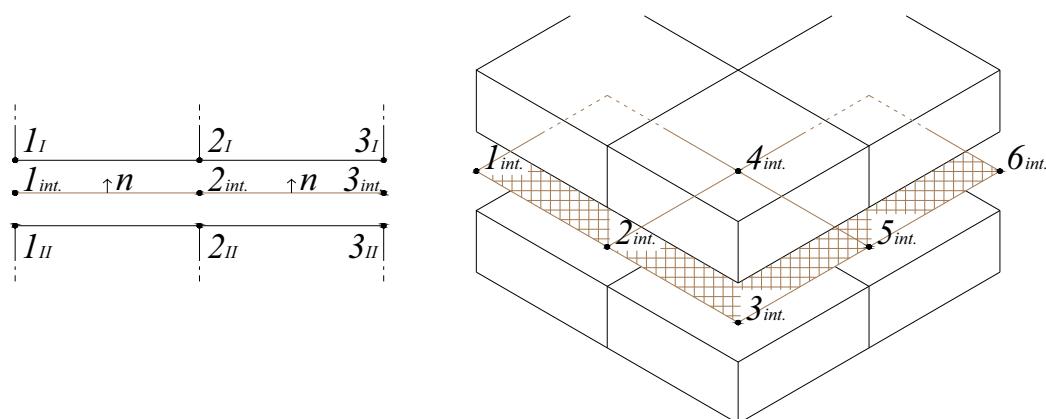


Figura IV.5.1.3: Elementi di interfaccia per lo studio di casi 2D e 3D.

La discontinuità tra la fila di elementi finiti superiore e quella inferiore alla frattura viene modellata tramite un legame costitutivo di interfaccia che mette in relazione il

salto del campo di spostamento con la componente normale del vettore tensione agente sulla superficie di interfaccia ($\underline{t}_n = \underline{T}\underline{n}$). Ancora una volta, come già discusso per il caso delle molle non lineari, un legame costitutivo che presenta un ramo di *softening* (il ramo BC di Figura IV.5.1.4), comporta propagazione della frattura.

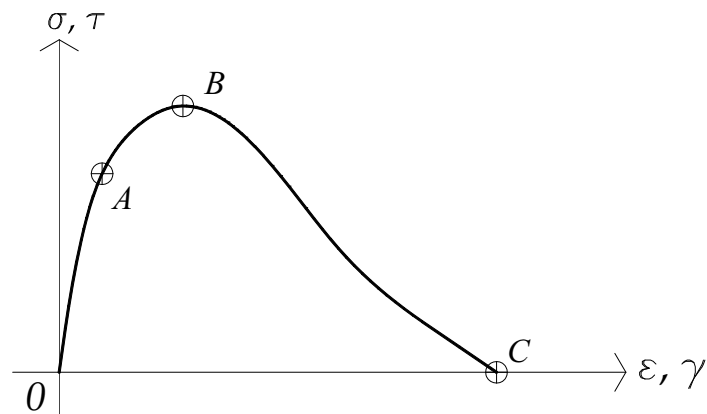


Figura IV.5.1.4: Legame costitutivo, nel caso semplice monodimensionale, per elementi di interfaccia. Si fa notare che in Figura IV.5.1.2 il legame carico-spostamento è elastico lineare con *softening* lineare; chiaramente è possibile, come mostrato in Figura IV.5.1.4, adottare un comportamento non lineare sia nella fase elastica che in quella *softening*.

IV.5.2. Elemento misto – ibrido ottimale di trave a due nodi per lo studio della delaminazione

Per modellare la delaminazione [Alfano e Crisfield; 2001] occorre predisporre una *mesh* fitta e definire a priori la zona laddove si sviluppa la decoesione.

Se la lamina soggetta al distacco è molto sottile è necessario utilizzare elementi con un rapporto di forma adeguato e dunque molto numerosi con un conseguente notevole incremento dell'onere computazionale.

Per ovviare a questo inconveniente, nel seguito, viene proposto un elemento finito misto – ibrido in grado di incorporare l'interfaccia, rispetto alla quale avviene la delaminazione, come una discontinuità del campo di spostamenti [Armero, Ehrlich; 2004, 2006]. Questa tecnica si ispira a quelle già utilizzate negli *X-FEM* ma è concettualmente diversa in quanto il salto di spostamento è modellato nello spessore dell'elemento anziché in senso longitudinale.

Come già visto nel paragrafo III.2.1 per elementi ottimali a 2 nodi si hanno a disposizione 3 parametri di deformazione. I campi di deformazione estensionale e la curvatura vengono modellati quindi in questo modo:

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 &= \beta_1 \\ \kappa &= \beta_2 + z\beta_3.\end{aligned}\quad (\text{IV.5.2.1})$$

Da qui è possibile, come visto nel paragrafo III.2.1, determinare la matrice di rigidità elastica dell'elemento non ancora delaminato. Al contrario se si vuole considerare l'elemento delaminato o in fase di delaminazione si devono, come detto in precedenza, introdurre le discontinuità nel campo degli spostamenti e quindi:

$$\begin{cases} u_z(z) = \sum_{i=1}^2 La_i(z) \cdot [u_{zi} + \delta u_{zi} \cdot \tilde{H}_i(\eta)], \\ u_y(z) = \sum_{i=1}^2 La_i(z) \cdot [u_{yi} + \delta u_{yi} \cdot \tilde{H}_i(\eta)], \\ \varphi(z) = \sum_{i=1}^2 La_i(z) \cdot [\varphi_i + \delta \varphi_i \cdot \tilde{H}_i(\eta)]. \end{cases} \quad (\text{IV.5.2.2})$$

Nella (IV.5.2.2) si riconoscono, oltre agli spostamenti nodali u_{zi} , u_{yi} , φ_i e i relativi salti δu_{zi} , δu_{yi} , $\delta \varphi_i$, le funzioni di forma polinomiali del primo ordine di Lagrange, $La_i(z)$, e delle funzioni, $\tilde{H}_i(\eta)$, a gradino unitario o di *Heaviside*. Queste ultime consentono di inserire il salto del campo di spostamenti e possono essere rappresentate graficamente nel modo seguente (Figura IV.5.2.1):

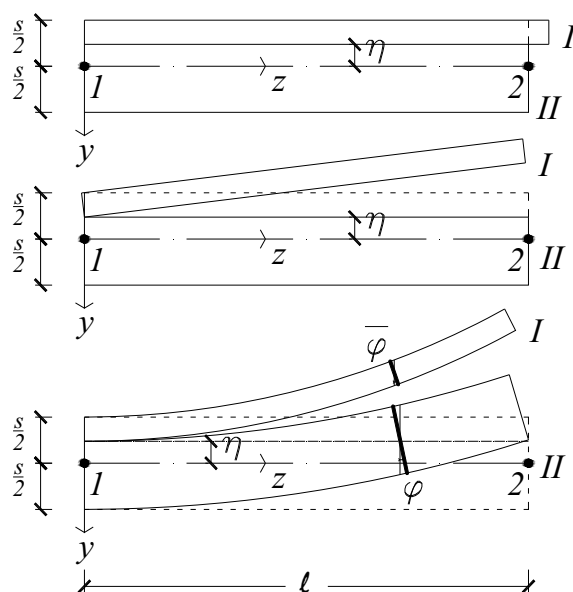


Figura IV.5.2.1: a) Salto nel campo di spostamento assiale alla quota η ; b) Salto nel campo di spostamento trasversale alla quota η ; c) Salto nel campo di spostamento rotazionale alla quota η .

Si osservi che le (IV.5.2.2) e la Figura IV.5.2.1 evidenziano una nuova metodologia per inserire il salto di spostamenti. In particolare è possibile scrivere un elemento finito in cui è possibile attivare la discontinuità a partire da un parametro di controllo (ad esempio per i laminati la tensione tangenziale di interlamina) senza dover necessariamente sapere a priori qual è la superficie di propagazione della frattura.

Considerando il caso della delaminazione in mezzzeria ($\eta = 0$) e per semplicità con salto solo sullo spostamento assiale si ha:

$$\begin{aligned} \eta < 0 \rightarrow \tilde{H}(\eta) = 0 \rightarrow u_z^I &= \sum_{i=1}^2 La_i(z) \cdot u_{zi}, \\ \eta \geq 0 \rightarrow \tilde{H}(\eta) = 1 \rightarrow u_z^{II} &= \sum_{i=1}^2 La_i(z) \cdot [u_{zi} + \delta u_{zi}]. \end{aligned} \quad (\text{IV.5.2.3})$$

Se si impone, come condizione di vincolo, un incastro nell'estremo 1 si ha che:

$$\begin{cases} u_{z1}^I(0) = u_{z1}^{II}(0) \rightarrow \delta u_{z1} = 0, \\ \delta u_{z2} = u_{z2}^{II}(\ell) - u_{z2}^I(\ell). \end{cases} \quad (\text{IV.5.2.4})$$

Un analogo ragionamento è ovviamente possibile per le altre componenti di spostamento.

A tutti gli effetti l'introduzione delle discontinuità comporta un raddoppio delle variabili nodali ed è del tutto equivalente a modellare due travi laminate distinte ove si assumono indipendentemente i parametri di deformazione $\underline{\beta}$.

Infine per quanto riguarda le matrici di rigidezza relative all'interfaccia se si considerano molle non lineari dalla (IV.5.1.2) si ottiene la matrice di rigidezza dell'interfaccia nella parte relativa agli spostamenti nodali considerati. Se invece si utilizzano elementi finiti di interfaccia [Qui e al., 2001] si ha la situazione evidenziata in Figura IV.5.2.2:

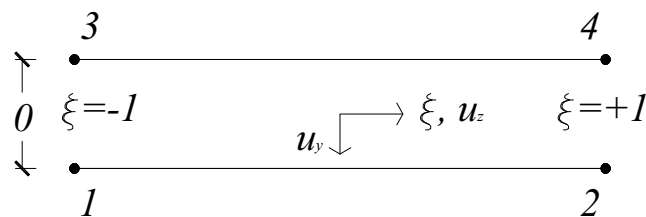


Figura IV.5.2.2: Elemento di interfaccia a 4 nodi, caso monodimensionale.

Rispetto al sistema di riferimento locale, il vettore degli spostamenti nodali è $\underline{q} = [u_{z1}, u_{y1}, u_{z2}, u_{y2}, u_{z3}, u_{y3}, u_{z4}, u_{y4}]^T$ dove si distinguono i due vettori degli spostamenti relativi ai nodi inferiori, $\underline{q}_{\text{inf}}$, e superiori, $\underline{q}_{\text{sup}}$:

$$\underline{q}_{\text{inf}} = [u_{z1}, u_{y1}, u_{z2}, u_{y2}]^T \quad \underline{q}_{\text{sup}} = [u_{z3}, u_{y3}, u_{z4}, u_{y4}]^T. \quad (\text{IV.5.2.5})$$

Il campo di spostamenti dell'elemento risulta essere quindi:

$$\underline{u}_{\text{inf}} = \underline{La} \cdot \underline{q}_{\text{inf}} \quad \text{e} \quad \underline{u}_{\text{sup}} = \underline{La} \cdot \underline{q}_{\text{sup}}, \quad (\text{IV.5.2.6})$$

dove \underline{La} rappresenta la matrice delle funzioni di forma Lagrangiane.

Gli spostamenti relativi all'interfaccia risultano dalla differenza tra le (IV.5.2.6) e sono del tipo:

$$\delta \underline{u} = \underline{u}_{\text{sup}} - \underline{u}_{\text{inf}} = \underline{La} \cdot \underline{q}_{\text{sup}} - \underline{La} \cdot \underline{q}_{\text{inf}} = \underline{B} \cdot \underline{q}, \quad (\text{IV.5.2.7})$$

Se si utilizza il principio dei lavori virtuali per determinare il vettore delle forze nodali interne \underline{S} corrispondente al vettore degli spostamenti nodali \underline{q} si ha:

$$\underline{S} = \int_{\beta_{\text{int}}} \underline{B}^T \cdot \underline{\sigma} \, dA, \quad (\text{IV.5.2.8})$$

in cui le tensioni $\underline{\sigma}$ sono calcolate dagli spostamenti relativi mediante l'imposizione del legame costitutivo definito in precedenza (Figura IV.5.1.4).

Sostituendo il legame costitutivo la (IV.5.2.8) diventa:

$$\underline{S} = \int_{\beta_{\text{int}}} [\underline{B}^T \underline{C} \underline{B} \underline{q}] \, dA, \quad (\text{IV.5.2.9})$$

Quindi, differenziando la (IV.5.2.9), si determina la matrice di rigidità dell'elemento di interfaccia:

$$\delta \underline{S} = \underline{K}_{\text{int}} \delta \underline{q}, \quad (\text{IV.5.2.10})$$

dove:

$$\underline{K}_{\text{int}} = \int_{\beta_{\text{int}}} \underline{B}^T \cdot \underline{C} \cdot \underline{B} \, dA. \quad (\text{IV.5.2.11})$$

Nella (IV.5.2.11) \underline{C} rappresenta la matrice tangente dei moduli elastici dell'interfaccia.

IV.5.3 DCB Test

Per le simulazioni si è considerato il caso della frattura del mono strato caratterizzato dai seguenti valori numerici:

$$E = 3 \times 10^4 \text{ MPa}; \quad \nu = 0.3 \quad b = s = 20 \text{ cm}$$

In Figura IV.5.3.1 si riporta la propagazione della delaminazione con una *mesh* di 100 elementi e una fessura iniziale imposta lunga $L/2$.

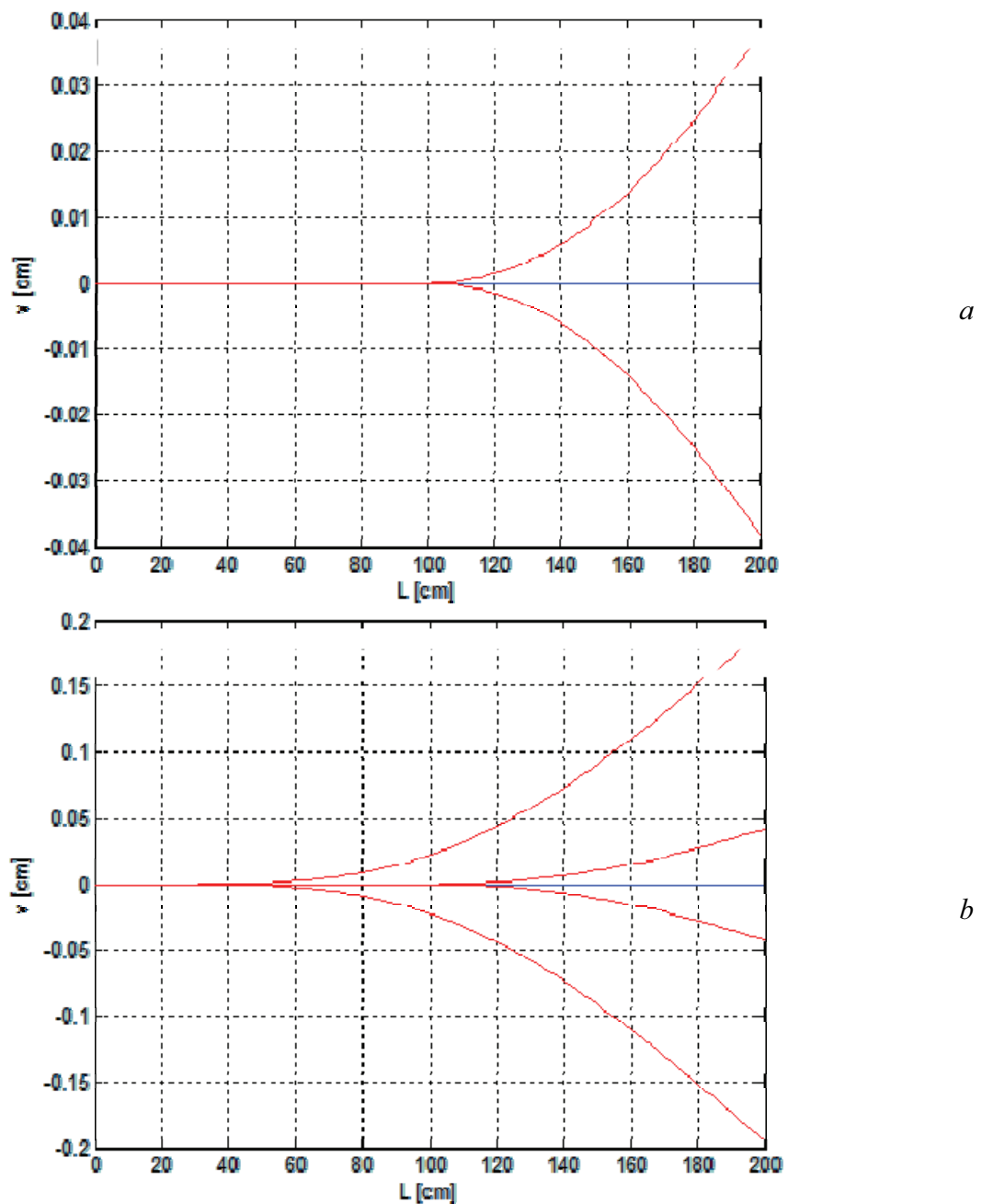


Figura IV.5.3.1: Propagazione della frattura per *mesh* con 100 elementi:

- a) con una forza impressa di 2200.000 N si ottiene uno spostamento di 0.0420 cm;
 b) con una forza impressa di 1430.906 N si ottiene uno spostamento di 0.1948 cm.

Nelle Figure IV.5.3.2 e IV.5.3.3 si riportano le curve carico-spostamento ottenute sia in controllo di spostamento che con il metodo *arc-length* rappresentando l'interfaccia con molle non lineari ($k_0 = 8.5 \text{ N/mm}$) e con elementi di interfaccia ($E_0 = 8.5 \text{ MPa}$).

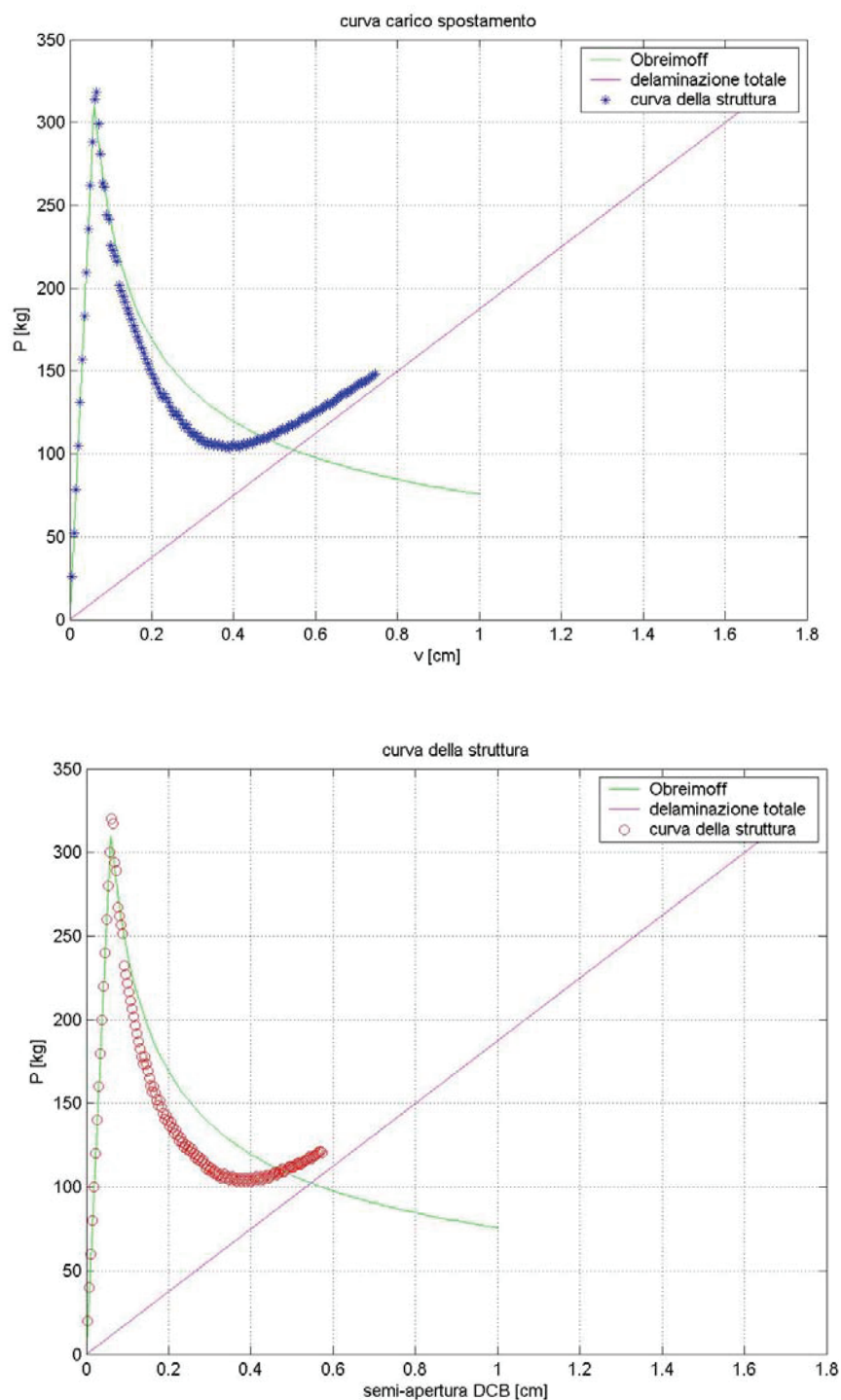


Figura IV.5.3.2: Curve carico spostamento in controllo di spostamento (a) e con il metodo *arc-length* (b). Interfaccia simulata da molle non lineari.

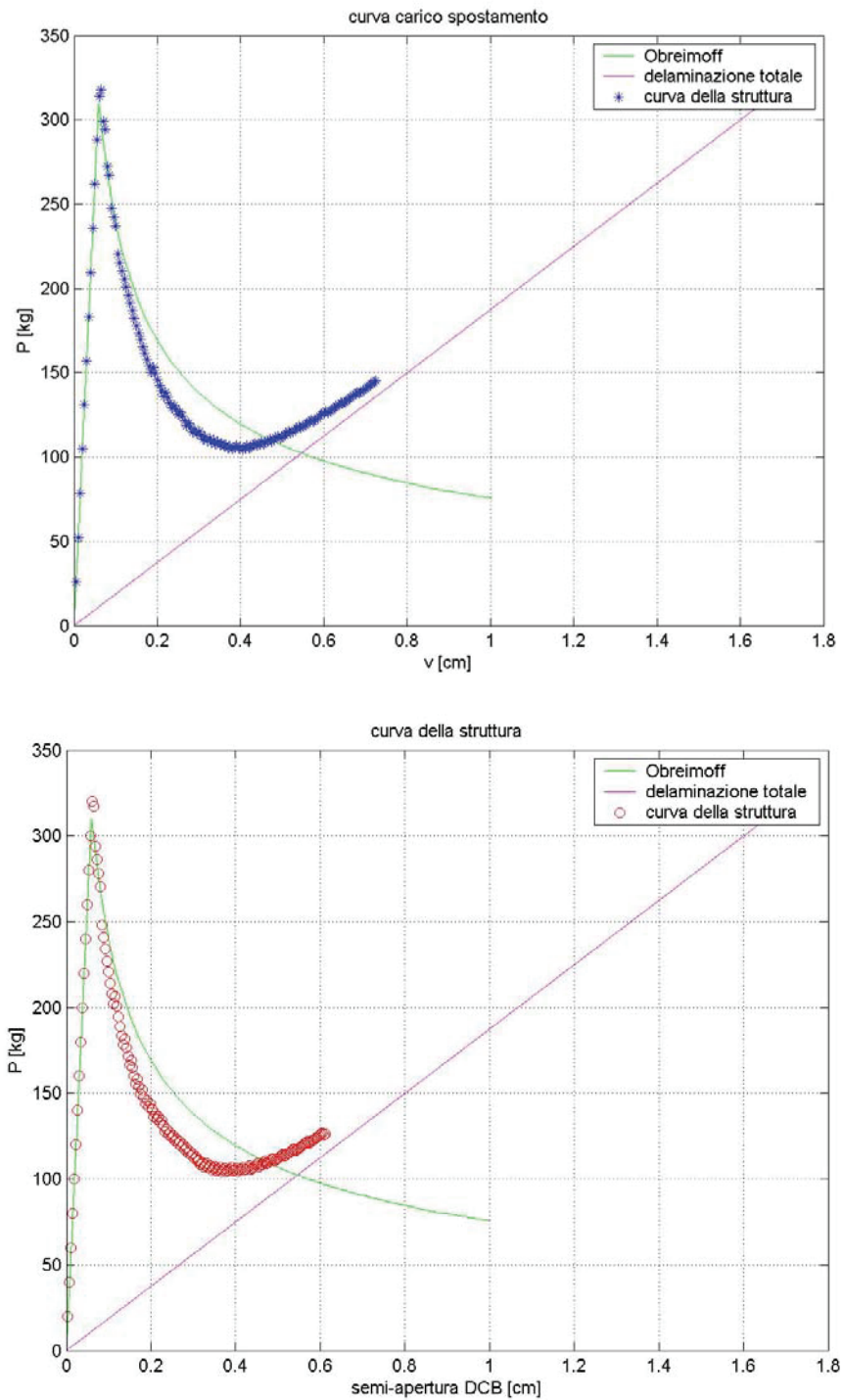


Figura IV.5.3.3: curve carico spostamento in controllo di spostamento (a) e con il metodo *arc-length* (b). Interfaccia simulata con elementi di interfaccia.

IV.5.4 Delaminazione secondo il modo I – conclusioni

Come si nota dai *test* numerici rappresentati nelle Figure IV.5.3.2 e IV.5.3.3 la corrispondenza tra i due tipi di controllo (in termini di spostamento e *arc-length*) è ottima.

In entrambi i casi si ottiene una buona corrispondenza alla curva analitica di Obreimoff che rappresenta la soluzione di riferimento considerata (trattazione riportata in Appendice C).

Ottima è anche la correlazione fra i risultati ottenuti mediante l'utilizzo di molle non lineari ed elementi finiti di interfaccia.

Bibliografia

- [1] Alfano G., Crisfield M. A. 2001. *Finite element interface models for the delamination analysis of laminated composites: mechanical and computational issues* – International Journal for Numerical Methods in Engineering, **50**: 1701-1736.
- [2] Armero F., Ehrlich D. 2004. *An analysis of strain localization and wave propagation in plastic models of beams at failure* – Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **193**: 3129-3171.
- [3] Armero F., Ehrlich D. 2006. *Numerical modeling of softening hinges in thin Euler-Bernoulli beams* – Computer and Structures, **84**: 641-656.
- [4] Armero F., Ehrlich D. 2006. *Finite element methods for the multi-scale modeling of softening hinge lines in plates at failure* – Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **195**: 1283-1324.
- [5] Bonet J., Wood R. D. 1997. *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis* – Cambridge University Press, Cambridge.
- [6] Brunelle E. J., Robertson S.R. 1976. *Vibrations of an initially stressed thick plate* – Journal of Sound and Vibration, **45**:405–416.
- [7] Caporale A., Luciano R., Sacco E. 2006. *Micromechanical analysis of interfacial debonding in unidirectional fiber-reinforced composites* – Computer and Structures, **84**: 2200-2211.
- [8] Cazzani A., Garusi E., Tralli A., Atluri S.N. 2005. *A four-node hybrid assumed strain finite element for laminated composite plates* – CMC: Computers, Materials & Continua. **2**:101–116.
- [9] Cazzani A., Battaglia R., Benvenuti E., Tralli A. 2007. *A mixed plate model allowing for arbitrary delamination* – ICCES'07, Miami, FL.
- [10] Corradi Dell'acqua L. 1992. *Meccanica delle strutture (vol.2) – le teorie strutturali e il metodo degli elementi finiti* – McGraw-Hill, Milano.

-
- [11] Corradi Dell'acqua L. 1994. *Meccanica delle strutture (vol.3) – la valutazione della capacità portante* – McGraw-Hill, Milano.
- [12] Crisfield M.A. 2000. *Non Linear Finite Element Analysis of Solid and Structures* – Wiley, Chichester.
- [13] Doong J. L. 1987. *Vibration and stability of an initially stressed thick plate according to a high-order deformation theory* – Journal of Sound and Vibration, **113**: 425–440.
- [14] Gambarotta L., Nunziante L., Tralli A. 2003. *Scienza delle costruzioni* – McGraw-Hill, Milano.
- [15] Kosmatka J. B. 1995. *An improved two-node finite element for stability and natural frequencies of axial-loaded Timoshenko beams* – Computer and Structures, **57**: 141-149.
- [16] Malvern L.E. 1969. *Introduction to the mechanics of a continuous medium* – Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- [17] Matsunaga H. 1994. *Free vibration and stability of thick elastic plates subjected to in-plane forces* – International Journal of Solids and Structures. **31**:3113–3124.
- [18] Phani Kumar V. V. Nukuala, Donald W. White. 2004. *A mixed finite element for three-dimensional nonlinear analysis of steel frames* – Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **193**: 2507-2545.
- [19] Pian T.H.H., Wu C.-C. 2006. *Hybrid and incompatible finite element methods* – CRC, Boca Raton, FL.
- [20] Qiu Y., Crisfield M.A., Alfano G. 2001. *An interface element formulation for the simulation of delamination with buckling* – Engineering Fracture Mechanics **68**: 1755-1776.
- [21] Reddy J.N., Phan N.D. 1985. *Stability and vibration of isotropic, orthotropic and laminated plates according to a higher-order shear deformation theory* – Journal of Sound and Vibration, **98**:157–170.
- [22] Reddy J. N. 2004. *Mechanics of laminated composite plates and shells - Theory and analysis* – CRC, Boca Raton, FL.

-
- [23] Saje M., Jalenić G. 1995. *A kinematically exact space finite strain beam model-finite element formulation by generalized virtual work principle* – Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **120**: 131-161.
- [24] Simo J.C., Vu-Quoc L. 1988. *On the dynamics in space of rods undergoing large motions – a geometrically exact approach* – Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **66**: 125-161.
- [25] Timoshenko S.P., Woinowsky-Krieger S. 1952. *Theory of plates and shells* – McGraw-Hill, New York.
- [26] Washizu K. 1982. *Variational methods in elasticity and plasticity* – Pergamon Press, Oxford.
- [27] Zavarise G., Wriggers P., Schrefler B. A. 1998. *A method for solving contact problems* – International Journal for Numerical Methods in Engineering, **42**: 473-498.

Capitolo V

ANALISI ELASTICA-LINEARE DI TRAVI CURVE NEL PIANO

v.1. Introduzione

Nel Capitolo I (paragrafo I.4.5) si è riportato un modello di trave curva piana agli spostamenti e si è mostrato che, oltre al fenomeno dello *shear-locking*, un approccio classico agli spostamenti comporta anche il problema del *membrane-locking*. Per ovviare a tali inconvenienti in questo Capitolo si propongono elementi finiti curvi di tipo misto – ibrido derivati dal principio di Hu-Washizu modificato, già utilizzato nei Capitoli III e IV.

I campi incogniti rispetto ai quali si scrive il principio variazionale sono ancora una volta il campo di spostamenti (\underline{u}) e il campo di deformazione ($\underline{\varepsilon}$); questo in prospettiva di una generalizzazione ai laminati compositi.

Per derivare un elemento finito di trave curva utilizzando polinomi (ad esempio Lagrangiani) per modellare sia la geometria che il campo di spostamenti, è necessario considerare almeno un'interpolante quadratica e quindi gli elementi debbono avere almeno 3 nodi [Bathe; 1996]. Una valida alternativa, ancora in fase di sviluppo, è l'utilizzo dell'analisi isogeometrica attraverso *NURBS* (*Non Uniform Rational B-Splines*) per la modellazione della geometria e delle incognite del problema.

v.2. Travi curve piane: teoria tecnica

Si consideri una generica curva C aperta regolare nello spazio \mathbb{R}^3 e sia $\lambda = \lambda(s)$ (dove s è l'ascissa curvilinea) la sua equazione parametrica in un determinato sistema di riferimento cartesiano $\{0, x, y, z\}$ levogiro ortogonale (Figura V.2.1). [si veda *Ascione, Fraternali; 1986*].

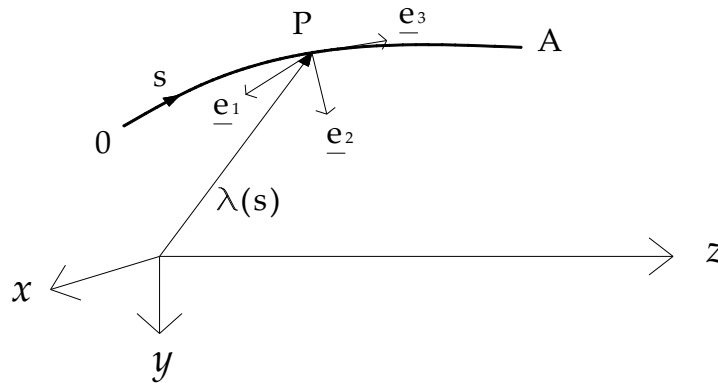


Figura V.2.1: Curva C nello spazio.

Nell'ipotesi che la funzione $\lambda = \lambda(s)$ sia dotata di derivata seconda continua rispetto alla variabile s è possibile associare al generico punto P della curva la terna ortonormale levogira $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}^T$, costituita, nell'ordine, dal versore binormale, dal versore normale e da quello tangente alla curva stessa.

Volendo studiare la curva è necessario disporre anche delle sue derivate e, dal momento che ogni grandezza associata alla curva è legata alla terna intrinseca, conviene introdurre le formule di Frénet [‡] note dalla geometria differenziale.

Per definire una trave si considera una regione piana S (la sezione retta) dotata di frontiera ∂S regolare a tratti, la regione di spazio generata dalla traslazione di S ,

‡*Formule di Frénet* (per una trattazione più approfondita si rimanda all'Appendice D)

Le formule di Frénet, note dalla geometria differenziale, esprimono le derivate rispetto all'ascissa curvilinea "s" dei versori della terna intrinseca.

Caso tridimensionale:

$$\begin{cases} \frac{de_1}{ds} = \frac{1}{\tau} e_2 \\ \frac{de_2}{ds} = -\frac{1}{\tau} e_1 - \frac{1}{R} e_3 \\ \frac{de_3}{ds} = \frac{1}{R} e_2 \end{cases}$$

Caso bidimensionale piano:

$$\begin{cases} \frac{de_1}{ds} = 0 \\ \frac{de_2}{ds} = -\frac{1}{R} e_3 \\ \frac{de_3}{ds} = \frac{1}{R} e_2 \end{cases}$$

dove R e τ sono rispettivamente la curvatura e la torsione della curva.

tale che il suo baricentro G si mantenga sulla curva $\lambda = \lambda(s)$ (curva che viene detta asse della trave) e che S resti ortogonale alla curva stessa.

Nel caso particolare in cui l'asse della trave nonché le forze agenti sulla trave stessa e gli spostamenti dei suoi punti sono tutti contenuti in un piano $\Pi(y,z)$ la trave si dice *piana*.

Nel caso più generale (trave non piana) nell'ipotesi di conservazione delle sezioni piane, la cinematica di una generica sezione si può esprimere secondo la seguente relazione:

$$\hat{s}(\underline{h}) = \underline{u} + \underline{\Phi}(\underline{h} - \underline{d}) \quad (\text{V.2.1})$$

nella (V.2.1) \hat{s} rappresenta il vettore spostamento relativo al generico punto P appartenente alla sezione retta S , i vettori $\underline{u} = \underline{u}(s)$ e $\underline{\Phi}(s)$ denotano rispettivamente lo spostamento del baricentro G della stessa sezione S e la sua rotazione, mentre $\underline{h} = P - 0$ e $\underline{d} = G - 0$ sono i vettori posizione che individuano il punto P e il corrispondente baricentro G , come indicato in Figura V.2.2.

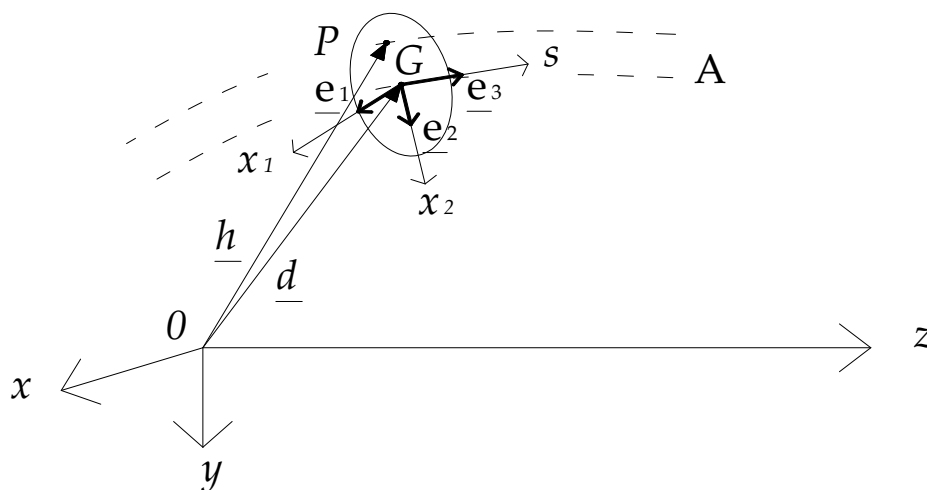


Figura V.2.2: Cinematica della trave.

La posizione \underline{h} del punto P può essere così espressa:

$$\underline{h} = \underline{h}(x_1, x_2, s) = \underline{d}(s) + x_1 \underline{e}_1(s) + x_2 \underline{e}_2(s), \quad (\text{V.2.2})$$

dove x_1 e x_2 rappresentano le coordinate intrinseche misurate nella direzione dei versori \underline{e}_1 ed \underline{e}_2 ; in particolare x_1 è misurato secondo la binormale e x_2 secondo la normale principale; la terza coordinata intrinseca, $x_3 \equiv s$ (l'ascissa curvilinea) è misurata secondo la tangente.

Se si è interessati allo studio della deformazione estensionale e si indica con ds^* la proiezione del vettore $(d\underline{h}/ds)ds$ lungo la direzione \underline{e}_3 (Figura V.2.2) e con \overline{ds}^* la corrispondente lunghezza a deformazione avvenuta si ha:

$$\frac{\overline{ds}^* - ds^*}{ds^*} = \varepsilon_{ss} = \frac{1}{(1 - x_2/R)} \left[\frac{du}{ds} \cdot \underline{e}_3 + \frac{d\Phi}{ds} \times (x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2) \cdot \underline{e}_3 \right]. \quad (\text{V.2.3})$$

Nella (V.2.3) compare il raggio di curvatura R fornito dalla (C.1.1.5).

Inoltre risulta che:

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{u}}{ds} &= \left(\frac{du_1}{ds} - \frac{u_2}{\tau} \right) \underline{e}_1 + \left(\frac{du_2}{ds} + \frac{u_1}{\tau} + \frac{u_3}{R} \right) \underline{e}_2 + \left(\frac{du_3}{ds} - \frac{u_2}{R} \right) \underline{e}_3 \\ \frac{d\Phi}{ds} \times (x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2) &= \left(-\frac{d\Phi_3}{ds} + \frac{\Phi_2}{R} \right) x_2 \underline{e}_1 + \left(\frac{d\Phi_3}{ds} - \frac{\Phi_2}{R} \right) x_1 \underline{e}_2 + \\ &+ \left(\frac{d\Phi_1}{ds} x_2 - \frac{d\Phi_2}{ds} x_1 - \frac{\Phi_1 x_1 + \Phi_2 x_2}{\tau} - \frac{\Phi_3 x_1}{R} \right) \underline{e}_3. \end{aligned} \quad (\text{V.2.4})$$

Nel caso piano, al quale per semplicità ci si riferirà da ora in poi, il versore binormale \underline{e}_1 è costante, cioè non varia lungo l'asse della trave, e le (V.2.4) si semplificano così:

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{u}}{ds} &= \left(\frac{du_r}{ds} + \frac{u_s}{R} \right) \underline{e}_2 + \left(\frac{du_s}{ds} - \frac{u_r}{R} \right) \underline{e}_3 \\ \frac{d\Phi}{ds} \times (r \underline{e}_2) &= \frac{d\varphi}{ds} r \underline{e}_3, \end{aligned} \quad (\text{V.2.5})$$

Nella (V.2.5) si sono indicate per maggiore comodità le uniche componenti non nulle di \underline{u} e $\underline{\Phi}$ con $u_2 = u_r$, $u_3 = u_s$, $\Phi_1 = \varphi$ e la coordinata x_2 con r .

Proiettando la (V.2.5.b) lungo la direzione del versore \underline{e}_3 e sostituendo nella (V.2.3) si ottiene per la deformazione estensionale della linea d'asse quest'espressione:

$$\varepsilon_{ss} = \frac{1}{(1 - r/R)} \left[\left(\frac{du_s}{ds} - \frac{u_r}{R} \right) + \frac{d\varphi}{ds} r \right]. \quad (\text{V.2.6})$$

La (V.2.6) rappresenta la deformazione assiale di una trave a forte curvatura che, come è noto, presenta un andamento iperbolico sulla traccia della sezione retta.

Considerando ora la tensione normale associata alla (V.2.6) ottenuta mediante il legame costitutivo elastico lineare si ottiene:

$$\sigma_{ss} = E \varepsilon_{ss} = \frac{E}{(1 - r/R)} \left[\left(\frac{du_s}{ds} - \frac{u_r}{R} \right) + \frac{d\varphi}{ds} r \right], \quad (\text{V.2.7})$$

dove E è il modulo elastico di Young.

Nelle ipotesi di una teoria tecnica, trascurando l'effetto di contrazione laterale indotto dalle tensioni normali (effetto *Poisson*), si ottengono di qui le caratteristiche generalizzate della sollecitazione N , azione assiale, e M , momento flettente:

$$N = \int_S \sigma_{ss} dA; \quad M = \int_S r \sigma_{ss} dA. \quad (\text{V.2.8})$$

Introducendo quindi le caratteristiche inerziali della sezione S così definite:

$$\left\{ \begin{array}{l} J_{1R} = \int_S \left(x_2^2 \frac{R}{R-x_2} \right) dA \\ J_{2R} = \int_S \left(x_1^2 \frac{R}{R-x_2} \right) dA \\ J_{12R} = \int_S \left(x_1 x_2 \frac{R}{R-x_2} \right) dA \\ S_{1R} = \int_S \left(x_2 \frac{R}{R-x_2} \right) dA \\ A_R = \int_S \left(\frac{R}{R-x_2} \right) dA = A + \frac{J_{1R}}{R^2}, \end{array} \right. \quad (\text{V.2.9})$$

che rappresentano i momenti d'inerzia ridotti, il momento statico ridotto e l'area ridotta. Se la sezione presenta un asse di simmetria lungo la direzione x_2 il momento d'inerzia centrifugo si annulla $J_{12R} = 0$ e quindi le relazioni (V.2.8), tenendo conto che ci si trova in un caso piano per il quale, come si è visto, si può porre $x_2 = r$, si specializzano nelle:

$$\begin{aligned} N &= \left(EA + \frac{EJ_{1R}}{R^2} \right) \varepsilon_{ss} + \left(\frac{EJ_{1R}}{R} \right) \kappa \\ M &= \left(\frac{EJ_{1R}}{R} \right) \varepsilon_{ss} + (EJ_{1R}) \kappa, \end{aligned} \quad (\text{V.2.10})$$

dove J_{1R} è semplicemente dato da: $J_{1R} = \int_S \left(r^2 \frac{R}{R-r} \right) dA$, e κ è la curvatura della linea d'asse. È quindi possibile ottenere i seguenti legami costitutivi inversi:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ss} &= \frac{N}{EA} - \frac{M}{R \cdot EA} = \frac{N_r}{EA} \\ \kappa &= -\frac{N_r}{R \cdot EA} + \frac{M}{EJ_{1R}}, \end{aligned} \quad (\text{V.2.11})^\ddagger$$

nella (V.2.11) la quantità N_r viene detta sforzo normale ridotto.

‡ Si noti che, per quanto riguarda le componenti generalizzate di deformazione, si sono considerati i soli contributi estensionale e di curvatura, il termine tangenziale verrà discusso nel seguito.

v.3. Relazioni di base per lo studio di travi curve piane

Come già accennato nel paragrafo precedente una trave si dice piana se il suo asse è contenuto in un piano $\Pi(y,z)$, detto piano della trave, nel quale sono contenute anche tutte le forze agenti su di essa e gli spostamenti di tutti i suoi punti (Figura V.3.1.a). [si veda Ascione e Fraternali; 1986].

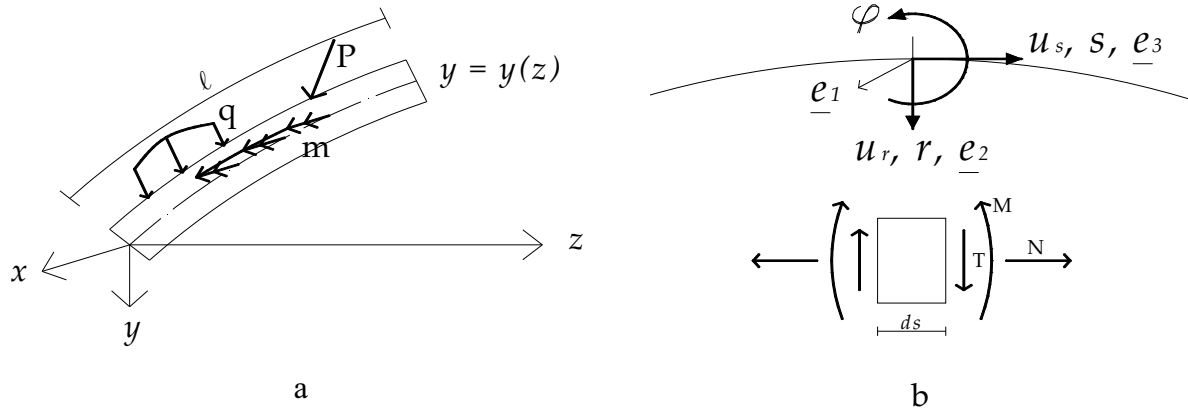


Figura V.3.1: Trave piana.

Se si considera la trave piana di Figura V.3.1.b, in cui vengono riportati anche i versori della terna intrinseca, il campo di spostamenti (V.2.1) si specializza come segue:

$$\begin{cases} s_s(s,r) = u_s(s) + r \cdot \varphi(s) \\ s_r(s,r) = u_r(s), \end{cases} \quad (\text{V.3.1})$$

nella (V.3.1) le componenti $u_s(s)$, $u_r(s)$, $\varphi(s)$ sono riferite alla terna intrinseca.

Volendo determinare le componenti generalizzate di deformazione si devono applicare le formule di Frénet, in quanto se si deriva il campo di spostamenti si deve tenere conto che la base non è fissa e occorre dunque derivare anche i versori della terna intrinseca. Nel caso specifico si ottiene:

$$\begin{cases} \varepsilon_{ss} = \frac{\partial s_s}{\partial s} = \frac{du_s(s)}{ds} + r \frac{d\varphi(s)}{ds} = \varepsilon_0(s) + r\kappa(s), \\ \gamma_{sr} = \frac{\partial s_r}{\partial s} + \frac{\partial s_s}{\partial r} = \frac{du_r(s)}{ds} + \varphi(s) = \gamma(s), \end{cases} \quad (\text{V.3.2})$$

Quindi le componenti generalizzate di deformazione, applicando le formule di Frénet per il caso bidimensionale piano, risultano:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_0 = \frac{du_s}{ds} - \frac{u_r}{R}; \\ \kappa = \frac{d\varphi}{ds}; \\ \gamma = \frac{du_r}{ds} + \frac{u_s}{R} + \varphi. \end{array} \right. \quad (\text{V.3.3})$$

Nella (V.3.3) $\varepsilon_0, \kappa, \gamma$ sono le deformazioni generalizzate identificabili con deformazione estensionale della linea d'asse, curvatura e scorrimento medio.

Seguendo il procedimento fornito da [Ascione e Fraternali; 1986] si possono ricavare le equazioni di equilibrio in termini di risultanti:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dN}{ds} - \frac{T}{R} + q_s = 0; \\ \frac{dT}{ds} + \frac{N}{R} + q_r = 0; \\ \frac{dM}{ds} - T + m = 0. \end{array} \right. \quad (\text{V.3.4})$$

Nel paragrafo precedente si è considerato il caso generale di trave a forte curvatura; se ci si limita a studiare travi piane debolmente curve il legame costitutivo nel caso elastico lineare si può scrivere nella forma seguente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_0 = \frac{du_s}{ds} - \frac{u_r}{R} = \frac{N}{EA} \\ \kappa = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{M}{EJ} \\ \gamma = \frac{du_r}{ds} + \frac{u_s}{R} + \varphi = \frac{T}{GA_s}, \end{array} \right. \quad (\text{V.3.5})$$

dove E e G sono rispettivamente i moduli di elasticità longitudinale e tangenziale; A , J e $A_s = k_T \cdot A$ sono invece l'area, il momento d'inerzia e l'area ridotta a taglio della sezione trasversale. In questo modo si giunge a definire completamente il problema di valori al contorno per travi curve, già introdotto per le travi rettilinee (I.4.1.2) e (I.4.1.3).

Si noti che nelle (V.3.5.a,b), al contrario che nelle (V.2.11), non compare lo sforzo normale ridotto N_r in quanto, in questo caso, l'andamento delle tensioni normali σ_{ss} sulla traccia della sezione retta è, come di consueto, lineare e non iperbolico.

Ancora una volta, come si è già visto nei paragrafi I.4.1 e I.4.2, si hanno a disposizione 9 equazioni: 3 equazioni (differenziali) di equilibrio (V.3.4), 3 equazioni (differenziali) di compatibilità (V.3.3) e 3 equazioni (algebriche) costitutive (V.3.5).

Analogamente a quanto riportato nel Capitolo I è possibile procedere integrando le equazioni di equilibrio (V.3.4) e ottenere le componenti di sollecitazione; quindi sostituendo queste ultime nelle equazioni costitutive (V.3.5) si determinano le componenti generalizzate di deformazione dalle quali, per integrazione delle equazioni (V.3.3) e imposte le condizioni di vincolo, si ottengono i campi di spostamento [si veda *Corradi, 1992*].

v.4. Elementi finiti di trave curva – analisi statica lineare

In questo paragrafo viene proposto un elemento finito misto – ibrido a due campi, basato sul principio variazionale di Hu-Washizu modificato, adatto a trattare travi curve piane, omogenee nelle ipotesi di validità della *FSDT*.

Lo spostamento del generico punto del solido trave può essere approssimato, nelle ipotesi di spostamenti piccoli e deformazioni infinitesime, secondo le relazioni (V.3.1) in questo modo la cinematica, rappresentata in Figura V.4.1, è completamente definita.

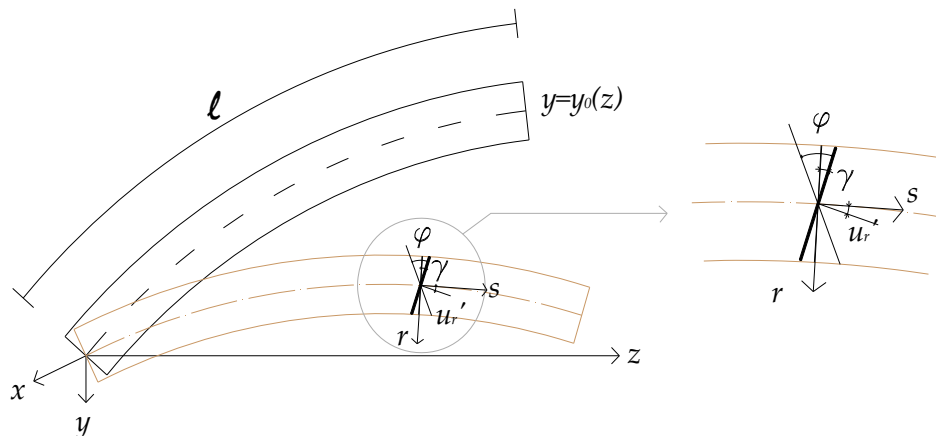


Figura V.4.1: Cinematica della trave curvilinea deformabile a taglio.

Procedendo come indicato al paragrafo precedente è possibile determinare le componenti non nulle del campo di deformazione:

$$\begin{cases} \varepsilon_{ss} = \frac{\partial s_s}{\partial s} = \frac{du_s(s)}{ds} + r \frac{d\varphi(s)}{ds} = \varepsilon_0(s) + r\kappa(s) & (a) \\ \gamma_{sr} = \frac{\partial s_r}{\partial s} + \frac{\partial s_s}{\partial r} = \frac{du_r(s)}{ds} + \varphi(s) = \gamma(s) & (b) \end{cases} \quad (V.4.1)$$

dove, come di consueto, le componenti locali di deformazione risultano esprimibili in funzione delle componenti generalizzate $\varepsilon_0(s)$, $\kappa(s)$ e $\gamma(s)$, che sono rispettivamente la deformazione assiale, la curvatura e la deformazione media a taglio. Introducendo il principio variazionale di Hu-Washizu modificato è possibile ricavare tutte le equazioni che governano il problema della trave piana di Timoshenko nel caso di linea d'asse curva. In particolare si ha:

$$\Pi_{\text{mod}}^{HW} = \Phi(\underline{\varepsilon}) - L_{\text{ext}} - \int_0^\ell (\underline{S}^T [\underline{\varepsilon} - L(\underline{v})]) dz, \quad (V.4.2)$$

dove $\underline{v} = \{u_s, u_r, \varphi\}^T$ è il vettore degli spostamenti generalizzati, $\underline{\varepsilon} = \{\varepsilon_0, \kappa, \gamma\}^T$ il vettore delle deformazioni generalizzate, $\underline{S} = \{N, M, T\}^T$ il vettore delle corrispondenti azioni interne (sforzo normale, momento flettente e taglio rispettivamente), Φ è l'energia di deformazione elastica mentre L_{ext} è il lavoro delle forze esterne. $L(\underline{v})$ è l'operatore che fornisce le deformazioni associate al campo di spostamento: si osservi che il termine $[\underline{\varepsilon} - L(\underline{v})]$ rappresenta le condizioni di compatibilità tra spostamenti e deformazioni e consente di imporre in forma debole, grazie ai moltiplicatori di Lagrange (\underline{S}), le (V.3.3). Nel caso semplice di trave omogenea, il potenziale elastico Φ si scrive come segue:

$$\Phi(\underline{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \int_0^\ell (EA\varepsilon_0^2 + EJ\kappa^2 + GA_s\gamma^2) ds, \quad (V.4.3)$$

dove E , G sono i moduli elastici (longitudinale e tangenziale) mentre A e J sono l'area e il momento d'inerzia della sezione retta rispettivamente; A_s rappresenta, invece, l'area a taglio che, in questa fase deve essere ancora assegnata a priori.

Come si è già visto nei Capitoli precedenti è possibile eliminare il problema dell'introduzione a priori del fattore di correzione a taglio tramite considerazioni di

equilibrio. In particolare, una volta assegnata un dato campo di deformazione assiale anche incompatibile, applicando il legame costitutivo, è possibile determinare la corrispondente tensione normale σ_{ss} e applicando l'equazione locale di equilibrio secondo la direzione del versore tangente, nell'ipotesi di forze di volume nulle, si ottiene per integrazione la tensione tangenziale τ_{sr} .

Brevemente, considerando in prima approssimazione la stessa equazione locale di equilibrio già utilizzata per le travi rettilinee, si ha:

$$\begin{aligned}\sigma_{ss} &= E\varepsilon_{ss} = E\left[\varepsilon_0(s) + r\kappa(s)\right] \\ \frac{\partial\sigma_{ss}}{\partial s} + \frac{\partial\tau_{sr}}{\partial r} &= 0 \rightarrow \tau_{sr} = \int_{-h/2}^r -\frac{d\sigma_{ss}}{ds} dr = \int_{-h/2}^r -E\left[\frac{d\varepsilon_0(s)}{ds} + r\frac{d\kappa(s)}{ds}\right] dr.\end{aligned}\quad (\text{V.4.4})$$

Se invece si considera la terza equazione locale di equilibrio in coordinate polari [†] [si veda *Timoshenko, 1951; Belluzzi, 1980*] si ha:

$$\begin{aligned}\sigma_{ss} &= E\varepsilon_{ss} = E\left[\varepsilon_0(s) + r\kappa(s)\right] \\ \frac{\partial\sigma_{ss}}{\partial s} + \frac{\partial\tau_{sr}}{\partial r} + 2\frac{\tau_{sr}}{R} &= 0 \\ \rightarrow \tau_{sr} &= e^{-\frac{2r}{R}} \int_{-h/2}^r \left(-\frac{d\sigma_{ss}}{ds} e^{\frac{2r}{R}}\right) dr = e^{-\frac{2r}{R}} \int_{-h/2}^r \left(-E\left[\frac{d\varepsilon_0(s)}{ds} + r\frac{d\kappa(s)}{ds}\right] e^{\frac{2r}{R}}\right) dr.\end{aligned}\quad (\text{V.4.5})$$

[†] Con riferimento al caso piano riportato nella figura a lato, al fine di ricavare le equazioni locali di equilibrio, si isola un elemento infinitesimo di spessore unitario individuato dalle due sezioni cilindriche di raggi “ r ” e “ $r+dr$ ” e due sezioni radiali di angoli “ θ ” e “ $\theta+d\theta$ ”. Si indicano con σ_{rr} e con $\sigma_{\theta\theta}$ le tensioni normali agenti sulle facce “ ab ” e “ ac ” e con $\tau_{r\theta}$ la tensione tangenziale agente su entrambe e con “ B_R ” una forza di volume unitaria avente direzione radiale. Se, per semplicità di notazione, si ha che:

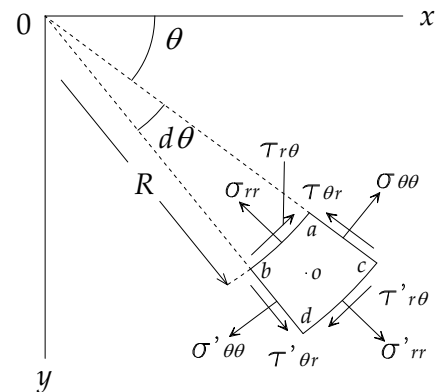
$$\sigma'_{rr} = \sigma_{rr} + \frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}; \quad \sigma'_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta} + \frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta}; \quad \tau'_{r\theta} = \tau_{r\theta} + \frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}; \quad \tau'_{\theta r} = \tau_{\theta r} + \frac{\partial\tau_{\theta r}}{\partial\theta};$$

imponendo l'equilibrio alla traslazione in direzione radiale e in direzione normale al raggio e trascurando gli infinitesimi del terzo ordine rispetto a quelli del secondo si ottiene:

$$\begin{cases} \sigma_{rr} dr d\theta + \frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} R dr d\theta - \sigma_{\theta\theta} dr d\theta + \frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta} dr d\theta + B_R R dr d\theta = 0 \\ \frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta} dr d\theta + \frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r} R dr d\theta + 2\tau_{r\theta} dr d\theta = 0 \end{cases}$$

quindi le equazioni locali di equilibrio risultano:

$$\begin{cases} \frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta} + B_R = 0 \\ \frac{1}{R} \frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r} + 2\frac{\tau_{r\theta}}{R} = 0 \end{cases}$$



Nota la tensione tagliante è possibile, integrando sulla sezione retta, determinare la componente di taglio dell'azione interna e l'energia ad essa associata che, come riportato in (V.4.3), entra direttamente nella determinazione del potenziale elastico.

$$\begin{cases} T = \int_A \tau_{zyi} dA \\ \frac{1}{2} GA_s \gamma^2 = \frac{1}{2} \int_A \frac{\tau_{zyi}^2}{G_i} dA. \end{cases} \quad (\text{V.4.6})$$

Come si è già visto nel Capitolo III il termine del lavoro esterno nell'equazione (V.4.2) si scrive come:

$$L_{ext} = \int_0^\ell (q_s u_s + q_r u_r + m\varphi) ds, \quad (\text{V.4.7})$$

Infine l'ultimo termine, che rappresenta il vincolo di compatibilità tra deformazioni e spostamenti, nell'equazione (V.4.2) diventa:

$$\int_0^\ell (S[\underline{\varepsilon} - L(\underline{v})]) ds = \int_0^\ell \left[N \left(\varepsilon_0 - \frac{du_s}{ds} + \frac{u_r}{R} \right) + M \left(\kappa - \frac{d\varphi}{ds} \right) + T \left(\gamma - \frac{du_r}{ds} - \frac{u_s}{R} - \varphi \right) \right] ds. \quad (\text{V.4.8})$$

v.4.1. Elemento misto – ibrido ottimale a tre nodi

Nelle ipotesi di elementi ottimali il numero dei parametri di deformazione che si possono utilizzare è in tutto eguale a 6: è cioè pari al numero dei gradi di libertà dell'elemento finito al netto del numero dei moti rigidi.

Se si sceglie la stessa interpolazione dei campi delle componenti generalizzate di deformazione già considerata nel paragrafo III.2.2 per il caso di trave ad asse rettilineo (che considera un'espressione lineare per la deformazione assiali generalizzata e una cubica per la curvatura) si ha:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \beta_1 + s\beta_2 \\ \kappa &= \beta_3 + s\beta_4 + s^2\beta_5 + s^3\beta_6. \end{aligned} \quad (\text{V.4.1.1})$$

Procedendo secondo quanto riportato nelle (V.4.4) (elemento *MHC1*) le tensioni tangenziali, sempre nel caso semplice della trave omogenea, diventano:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ss} &= \varepsilon_0 + r\kappa = (\beta_1 + s\beta_2) + r(\beta_3 + s\beta_4 + s^2\beta_5 + s^3\beta_6) \\ \rightarrow \sigma_{ss} &= E\varepsilon_{ss} = E \left((\beta_1 + s\beta_2) + r(\beta_3 + s\beta_4 + s^2\beta_5 + s^3\beta_6) \right) = E\varepsilon_0 + Er\kappa = \sigma_{ss}^0 + \sigma_{ss}^\kappa \quad (\text{V.4.1.2}) \\ \rightarrow \tau_{sr} &= \int_{-h/2}^r -\frac{\partial \sigma_{ss}^\kappa}{\partial s} dr = \int_{-h/2}^r -E \left[r(\beta_4 + 2s\beta_5 + 3s^2\beta_6) \right] dr. \end{aligned}$$

Si osserva che, come si è già considerato nel Capitolo III, per rispettare le equazioni di equilibrio in sede indefinita in termini di risultante, si trascura il contributo di β_2 nella valutazione di τ_{sr} . In altre parole si impone a priori che le tensioni tangenziali dipendano unicamente dal contributo flessionale (e non da quello estensionale) delle tensioni normali.

In queste ipotesi la componente di taglio dell'azione interna e l'energia di deformazione ad essa associata sono così definite:

$$\begin{cases} T = \int_A \tau_{sr} dA = EJ (\beta_4 + 2s\beta_5 + 3s^2\beta_6) \\ \frac{1}{2} GA_s \gamma^2 = \frac{1}{2} \int_A \frac{\tau_{sr}^2}{G} dA = \frac{bh^5}{120} \frac{E^2}{G} (\beta_4 + 2s\beta_5 + 3s^2\beta_6)^2. \end{cases} \quad (V.4.1.3)$$

Se si procede secondo quanto riportato nelle (V.4.5) (elemento MHC2), sempre nelle ipotesi di trave omogenea e trascurando il contributo fornito da β_2 , si ha:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ss} &= \varepsilon_0 + r\kappa = (\beta_1 + s\beta_2) + r(\beta_3 + s\beta_4 + s^2\beta_5 + s^3\beta_6) \\ \rightarrow \sigma_{ss} &= E\varepsilon_{ss} = E((\beta_1 + s\beta_2) + r(\beta_3 + s\beta_4 + s^2\beta_5 + s^3\beta_6)) = E\varepsilon_0 + Er\kappa = \sigma_{ss}^0 + \sigma_{ss}^\kappa \\ \rightarrow \tau_{sr} &= e^{-\frac{2r}{R}} \int_{-h/2}^r \left(-\frac{d\sigma_{ss}^\kappa}{ds} e^{\frac{2r}{R}} \right) dr = -E(\beta_4 + 2s\beta_5 + 3s^2\beta_6) e^{-\frac{2r}{R}} \int_{-h/2}^r \left(re^{\frac{2r}{R}} \right) dr \\ \text{Per Parti} \\ \rightarrow \tau_{sr} &= E(\beta_4 + 2s\beta_5 + 3s^2\beta_6) e^{-\frac{2r}{R}} \left[\frac{R^2}{4} e^{\frac{2r}{R}} - \frac{R^2}{4} e^{-\frac{h}{R}} - \frac{R}{2} re^{\frac{2r}{R}} - \frac{Rh}{4} e^{-\frac{h}{R}} \right]. \end{aligned} \quad (V.4.1.4)^\ddagger$$

Mediante integrazione sulla sezione retta è ora possibile ottenere la componente tagliante dell'azione interna e l'energia di deformazione ad essa associata.

Volendo ottenere un elemento finito a 3 nodi per travi piane curve, misto – ibrido nelle deformazioni e isoparametrico si modellano la geometria e i campi di spostamento (Figura V.4.1.1) con le stesse funzioni di forma.

‡ Si deve dimostrare che per $R \rightarrow \infty$ (caso della trave rettilinea) la derivata rispetto ad "r" della tensione tangenziale che si ottiene dalle (V.4.1.4) verifica la terza equazione locale di equilibrio scritta in assenza di forze di volume in coordinate cartesiane ortogonali: $\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0$

Studiando il limite di $\tau_{sr,r}$ per $R \rightarrow \infty$ si ha:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\partial \tau_{sr}}{\partial r} = \frac{h}{2} E\kappa' + E\kappa' \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R}{2} \left(e^{-\frac{2r+h}{R}} - 1 \right) = \frac{h}{2} E\kappa' - E\kappa' \left(\frac{h}{2} + r \right) = -\frac{\partial \sigma_{ss}}{\partial s} \rightarrow \frac{\partial \sigma_{ss}}{\partial s} + \frac{\partial \tau_{sr}}{\partial r} = \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0$$

$$\text{infatti } \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R}{2} \left(e^{-\frac{2r+h}{R}} - 1 \right) \text{ è un limite notevole del tipo: } \left(\frac{h}{2} + r \right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) = \left(\frac{h}{2} + r \right) \cdot 1$$

Nel caso più semplice le funzioni utilizzate sono polinomi quadratici di Lagrange che, nell'intervallo $[-1; +1]$ si scrivono così:

$$\begin{cases} La_1 = \frac{-\xi(1-\xi)}{2}; \\ La_2 = (1-\xi^2); \\ La_3 = \frac{\xi(1+\xi)}{2}. \end{cases} \quad (V.4.1.5)$$

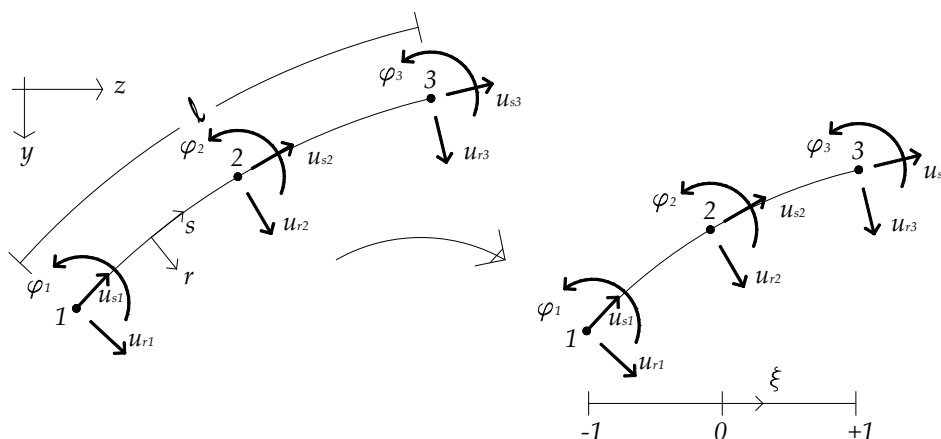


Figura V.4.1.1: Modello agli elementi finiti per travi curve di Timoshenko.

La geometria può essere quindi descritta così:

$$\begin{cases} z = \sum_i La_i \cdot z_i \\ y = \sum_i La_i \cdot y_i \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{dz}{d\xi} = \sum_{i=1}^3 \frac{dLa_i(\xi)}{d\xi} \cdot z_i \\ \frac{dy}{d\xi} = \sum_{i=1}^3 \frac{dLa_i(\xi)}{d\xi} \cdot y_i \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{d^2z}{d\xi^2} = \sum_{i=1}^3 \frac{d^2La_i(\xi)}{d\xi^2} \cdot z_i \\ \frac{d^2y}{d\xi^2} = \sum_{i=1}^3 \frac{d^2La_i(\xi)}{d\xi^2} \cdot y_i \end{cases} \quad (V.4.1.6)$$

Utilizzando ora gli algoritmi della geometria differenziale, si determinano il determinante Jacobiano della trasformazione e il raggio di curvatura in ogni punto:

$$J = \frac{ds}{d\xi} = \sqrt{\left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2}; \quad R = \frac{\left[\left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left\|\left(\frac{dz}{d\xi}\right) \cdot \left(\frac{d^2y}{d\xi^2}\right) - \left(\frac{dy}{d\xi}\right) \cdot \left(\frac{d^2z}{d\xi^2}\right)\right\|}. \quad (V.4.1.7)$$

Il campo di spostamenti viene modellato in questo modo:

$$\begin{cases} u_s(\xi) = \sum_{i=1}^3 La_i(\xi) \cdot u_{si} \\ u_r(\xi) = \sum_{i=1}^3 La_i(\xi) \cdot u_{ri} \\ \varphi(\xi) = \sum_{i=1}^3 La_i(\xi) \cdot \varphi_i. \end{cases} \quad (V.4.1.8)$$

È dunque possibile procedere alla discretizzazione del funzionale di Hu-Washizu modificato (V.4.2) e ottenere:

$$\Pi_{\text{mod}}^{HW} = -\frac{1}{2} \underline{\beta}^T \underline{\underline{H}}_{\beta\beta} \underline{\beta} + \underline{\beta}^T \underline{\underline{G}} \underline{q} - \underline{\underline{Q}}^T \underline{q}. \quad (\text{V.4.1.9})$$

Dove $\underline{q} = [u_{s1}, u_{r1}, \varphi_1, u_{s2}, u_{r2}, \varphi_2, u_{s3}, u_{r3}, \varphi_3]^T$ rappresenta il vettore degli spostamenti nodali mentre $\underline{\beta} = [\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6]^T$ il vettore dei parametri di deformazione. Nel caso più semplice di trave omogenea i termini di (V.4.1.9) diventano rispettivamente:

$$\begin{aligned} \underline{\beta}^T \underline{\underline{H}}_{\beta\beta} \underline{\beta} &= z \int_0^\ell \left[EA(\beta_1 + s\beta_3)^2 + EJ(\beta_3 + s\beta_4 + s^2\beta_5 + s^3\beta_6)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{bh^3}{120} \frac{E^2}{G} (\beta_4 + 2s\beta_5 + 3s^2\beta_6)^2 \right] ds \\ \underline{\beta}^T \underline{\underline{G}} \underline{q} &= \int_0^\ell \left[EA(\beta_1 + s\beta_3) \left(\frac{du_s}{ds} \right) + EJ(\beta_3 + s\beta_4 + s^2\beta_5 + s^3\beta_6) \left(\frac{d\varphi}{ds} \right) \right. \\ &\quad \left. + EJ(\beta_4 + 2s\beta_5 + 3s^2\beta_6) \left(\frac{du_r}{ds} + \varphi \right) \right] ds \\ \underline{\underline{Q}}^T \underline{q} &= \int_0^\ell (q_s u_s + q_r u_r + m\varphi) ds. \end{aligned} \quad (\text{V.4.1.10})$$

Procedendo analogamente a quanto riportato nei Capitoli III e IV imponendo la stazionarietà rispetto ai parametri di deformazione $\underline{\beta}$ e a quelli cinematici \underline{q} e poi condensando staticamente i parametri $\underline{\beta}$ si determina la matrice di rigidezza *elastica* del singolo elemento finito:

$$\begin{cases} \underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{H}}^{-1} \underline{\underline{G}} \underline{q} = \underline{\underline{Q}} \rightarrow \underline{\underline{K}}_e \underline{q} = \underline{\underline{Q}} \\ \underline{\beta} = \underline{\underline{H}}^{-1} \underline{\underline{G}} \underline{q} \end{cases}. \quad (\text{V.4.1.11})$$

v.4.2. Test numerici per travi curve omogenee

• Arco a forma di quarto di cerchio omogeneo incastrato ad un estremo e caricato all'estremo libero con una coppia e una forza radiale (Figura V.4.2.1). Di seguito si ripropone il *test* presentato nel paragrafo (I.4.5) dove si osserva l'assenza di *shear-locking* e di *membrane-locking* nel caso di 1 elemento a 3 nodi con rapporto s/R variabile. I risultati sono normalizzati rispetto alla soluzione analitica (ottenuta, mediante P.L.V., tenendo conto dei contributi di deformazione assiale, flessionale e tagliante).

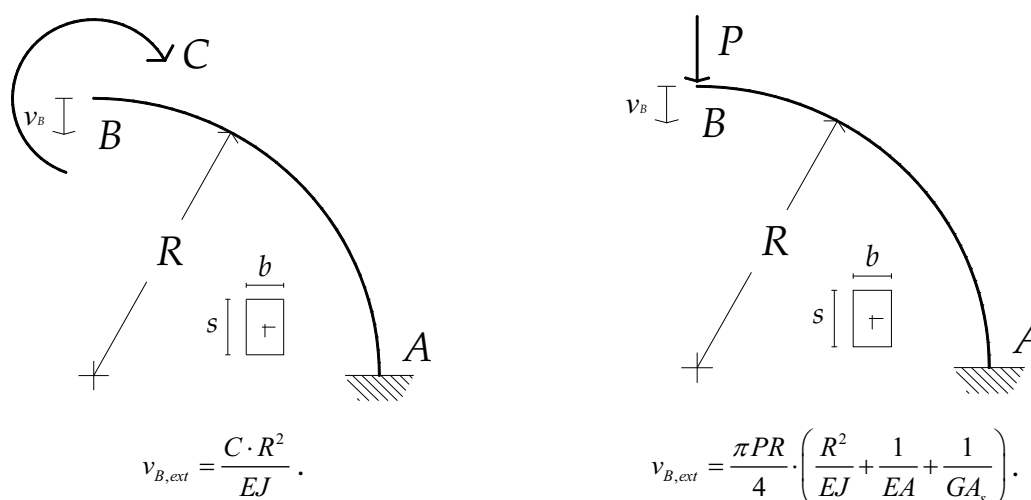


Figura V.4.2.1: Quarto di cerchio incastrato caricato da una coppia e da una forza radiale

In Tabella V.4.2.1 si mostra come in entrambi gli elementi proposti il fenomeno del *membrane-locking* sia assolutamente assente. Si osserva, inoltre, che tra i due modelli presentati non si ha una differenza percettibile in termini di spostamento di controllo in quanto la condizione di carico è tale per cui si ha momento costante e taglio nullo su tutta la trave e pertanto il contributo della differente integrazione della terza equazione locale di equilibrio per determinare le tensioni tangenziali è trascurabile.

R	s/R	MHC1				MHC2			
		v/v _{ext}	err. %	ε ₀	R _{vin} /R _{ext}	v/v _{ext}	err. %	ε ₀	R _{vin} /R _{ext}
1	1/10	0.9834	1.66	0.00	H _A = 1.000 V _A = 1.000 M _A = 1.000	0.9833	1.67	0.00	H _A = 1.000 V _A = 1.000 M _A = 1.000
1	1/100	0.9850	1.50	0.00	H _A = 1.000 V _A = 1.000 M _A = 1.000	0.9848	1.52	0.00	H _A = 1.000 V _A = 1.000 M _A = 1.000

Tabella V.4.2.1: Spostamenti radiali per quarto di cerchio caricato da una coppia al variare di s/L.

R	s/R	MHC1			MHC2		
		v/v _{ext}	err. %	R _{vin} / R _{ext}	v/v _{ext}	err. %	R _{vin} / R _{ext}
1	$\frac{1}{10}$	0.9856	1.44	H _A = 1.0000 V _A = 1.0138 M _A = 0.9910	0.9897	1.03	H _A = 1.0000 V _A = 1.0029 M _A = 1.0029
1	$\frac{1}{100}$	0.9872	1.28	H _A = 1.0000 V _A = 1.0057 M _A = 0.9979	0.9874	1.26	H _A = 1.0000 V _A = 1.0015 M _A = 1.0015

Tabella V.4.2.2: Spostamenti radiali per quarto di cerchio caricato da una forza al variare di s/L.

Il *test* proposto in Tabella V.4.2.2 la componente di taglio dell'azione interna è chiaramente variabile e il risultato in termini di spostamento radiale del nodo caricato, privo di *shear* e *membrane locking* per entrambi i modelli, dipende dalla modalità di valutazione delle tensioni tangenziali.

L'errato utilizzo delle (V.4.4), valide nel caso di travi rettilinee, comporta infatti una non accurata valutazione delle tensioni tangenziali e un errore sul calcolo delle reazioni vincolari.

Tuttavia l'approssimazione commessa con l'utilizzo delle (V.4.4) non comporta errori sistematici di formalizzazione dell'elemento infatti, al progressivo raffinarsi della *mesh*, si ha che la soluzione, sia in termini di spostamento che di reazioni vincolari, converge piuttosto rapidamente.

Questo comportamento, dovuto al fatto che il raffittimento del reticolo fa sì che la soluzione rettilinea (V.4.4) si discosti sempre meno da quella in coordinate polari (V.4.5), fa sì che l'elemento denominato *MHC1* converga alle soluzioni di riferimento.

In Tabella V.4.2.3 e V.4.2.4 si riportano rispettivamente, in forma adimensionale, i *test* di convergenza alla soluzione analitica all'aumentare della discretizzazione.

s/R	# di elem.	MHC1	err. %	MHC2	err. %
$\frac{1}{10}$	1	0.9834	1.66	0.9832	1.67
	2	0.9984	0.16	0.9979	0.21
	4	0.9999	0.01	0.9996	0.04
	8	1.0000	0.00	0.9999	0.01
	16	1.0000	0.00	1.0000	0.00

Tabella V.4.2.3: Convergenza per quarto di cerchio caricato da una coppia.

s/R	# di elem.	MHC1	err. %	MHC2	err. %
$\frac{1}{10}$	1	0.9856	1.44	0.9897	1.03
	2	0.9988	0.12	0.9997	0.03
	4	0.9999	0.01	1.0003	0.03
	8	1.0000	0.00	1.0002	0.02
	16	1.0000	0.00	1.0001	0.01

Tabella V.4.2.4: Convergenza per quarto di cerchio caricato da una forza.

In Figura V.4.2.2.a-b sono riportate rispettivamente le curve di convergenza e le reazioni vincolari, con un *mesh* composta da 16 elementi, per le due tipologie di elemento proposte nel caso di quarto di cerchio con carico radiale:

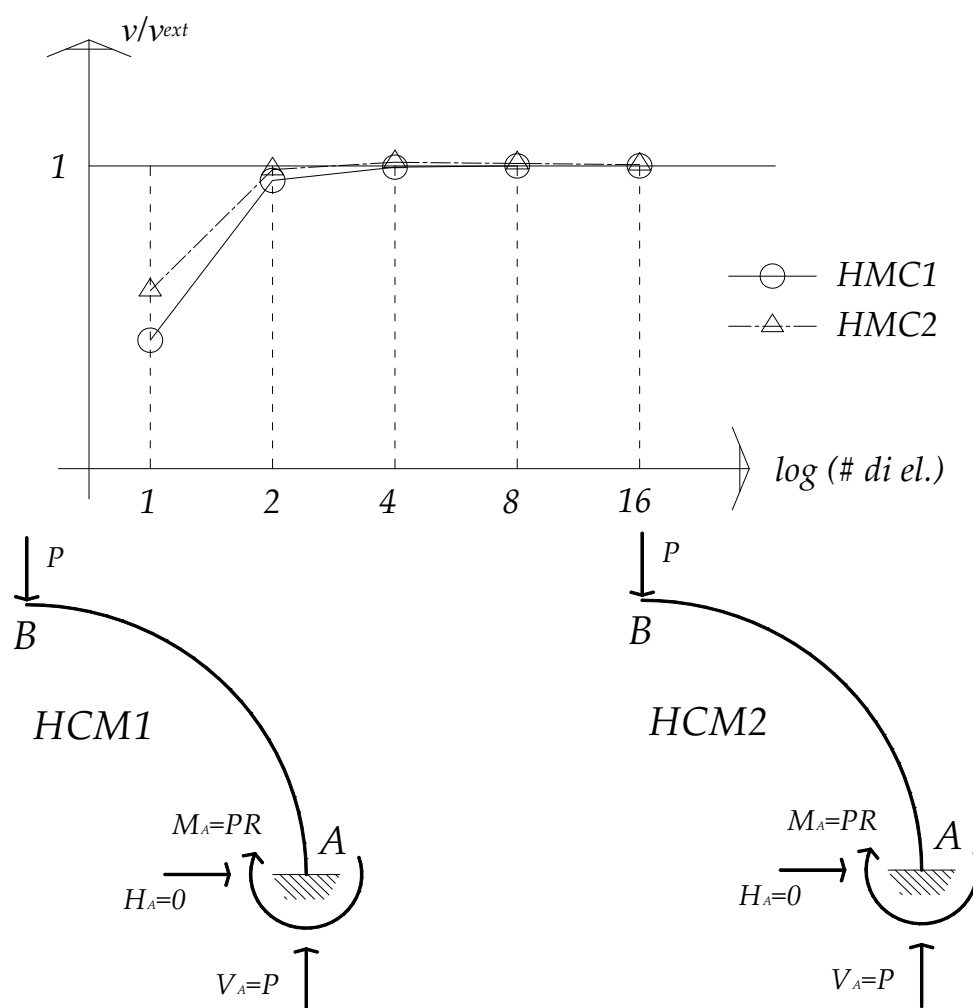


Figura V.4.2.2: a) Curve di convergenza adimensionali in termini di spostamento ($s/L=0.1$);

b) Reazioni vincolari per *mesh* composta da 16 elementi curvi MHC1 e MHC2.

In Figura V.4.2.2.b si osserva, come detto in precedenza, che sia l'elemento MHC1 sia l'elemento MHC2 con un numero sufficiente di elementi finiti presentano reazioni vincolari che convergono al valore analitico.

- Arco parabolico sottile semplicemente appoggiato con carico concentrato in mezzeria (Figura V.4.2.3). In Tabella V.4.2.5 e in Tabella V.4.2.6 si riportano rispettivamente i *test* di convergenza, con progressivo raffinamento della *mesh*, normalizzato alla soluzione analitica ottenuta mediante P.L.V. (in cui si sono considerati i contributi deformativi di origine assiale, flessionale e tagliante) per un arco parabolico caricato con una forza concentrata in mezzeria e differenti rapporti s/L ed f/L .

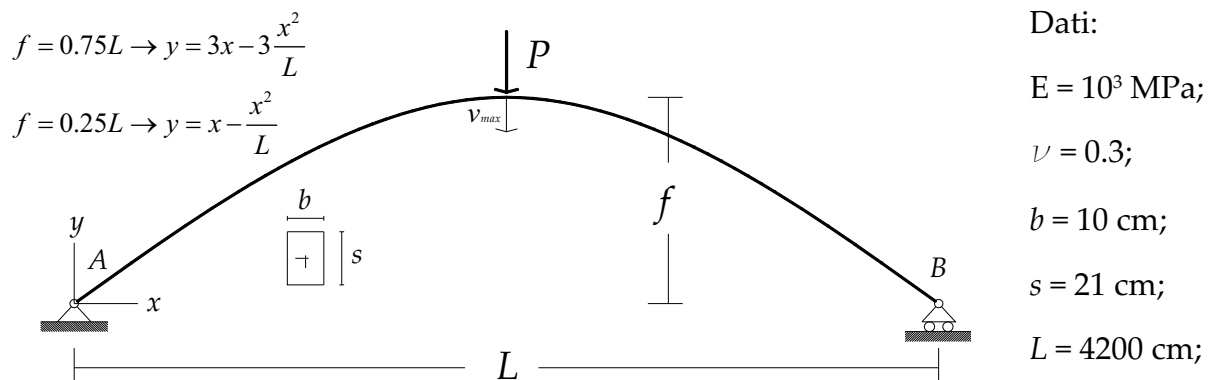


Figura V.4.2.3: Arco parabolico appoggiato con carico concentrato in mezzeria.

s/L	# di elem.	MHC1	err. %	MHC2	err. %
$\frac{1}{200}$	2	1.2171	21.71	1.2303	23.03
	4	1.0086	0.86	1.0101	1.01
	8	1.0008	0.08	1.0011	0.11
	16	1.0000	0.00	1.0001	0.01
	32	0.9999	0.01	0.9999	0.01
$\frac{1}{50}$	2	1.2000	20.0	1.2708	27.08
	4	1.0057	0.57	1.0213	2.13
	8	1.0001	0.01	1.0042	0.42
	16	0.9998	0.02	1.0010	0.10
	32	0.9998	0.02	1.0002	0.02
$\frac{1}{20}$	2	1.1526	15.26	1.2954	29.54
	4	1.0046	0.46	1.0366	3.66
	8	1.0000	0.00	1.0095	0.95
	16	0.9998	0.02	1.0034	0.34
	32	0.9998	0.02	1.0019	0.19

Tabella V.4.2.5: Convergenza per arco parabolico appoggiato con carico concentrato in mezzeria con rapporto $f/L=0.25$ e s/L variabile.

s/L	# di elem.	$MHC1$	err. %	$MHC2$	err. %
$\frac{1}{200}$	4	1.0366	3.66	1.0483	4.83
	8	1.0135	1.35	1.0142	1.42
	16	0.9988	0.12	0.9987	0.13
	32	1.0000	0.00	1.0000	0.00
$\frac{1}{50}$	4	1.0405	4.05	1.0902	9.02
	8	1.0033	0.33	1.0123	1.23
	16	1.0002	0.02	1.0025	0.25
	32	1.0000	0.00	1.0008	0.08
$\frac{1}{20}$	4	1.0366	3.66	1.1693	16.93
	8	1.0033	0.33	1.0302	3.02
	16	1.0003	0.03	1.0097	0.97
	32	1.0000	0.00	1.0057	0.57

Tabella V.4.2.6: Convergenza per arco parabolico appoggiato con carico concentrato in mezzeria con rapporto $f/L=0.75$ e s/L variabile.

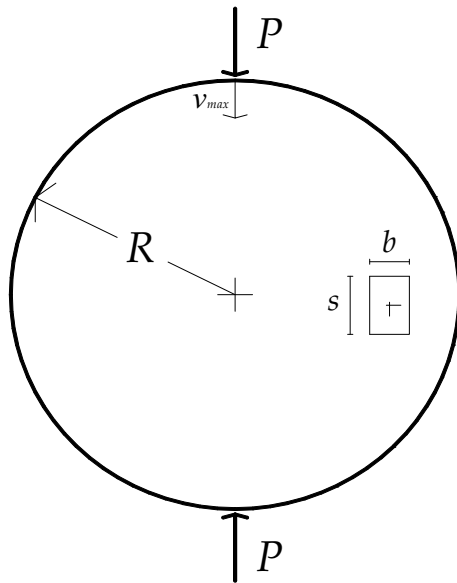
Dalle Tabelle V.4.2.5 e V.4.2.6 si osserva che l'elemento $MHC1$ presenta una convergenza migliore alla soluzione analitica rispetto all'elemento $MHC2$.

Il motivo di questo è legato al fatto che, come è evidente in Figura V.4.2.3, l'arco parabolico ha un raggio di curvatura variabile e in generale ampio su quasi tutto lo sviluppo della trave curva. Le (V.4.4) pertanto consentono di determinare un andamento delle tensioni tangenziali sulla sezione retta che meglio approssimano la reale distribuzione rispetto alle (V.4.5) che forniscono, invece, la soluzione esatta in coordinate polari e quindi solo per strutture il cui asse è un arco di cerchio.

- Cerchio completo con due carichi concentrati auto equilibrati (Figura V.4.2.4). In Tabella V.4.2.7 si riporta la convergenza al raffinarsi della *mesh* alla soluzione analitica [si veda *Kim e Park, 2006*] per un *ring* completo caricato da un sistema di due forze autoequilibrate.

Soluzione di riferimento:

$$v_{\max} = -\left(\frac{PR^3}{8\pi EJ}(\pi^2 - 8) + \frac{PR}{8EA} + \frac{PR}{8GA_s}\right); \quad [\text{Kim e Park, 2006}]$$



Dati:

$$E = 1.0 \times 10^7 \text{ MPa};$$

$$\nu = 0.0;$$

$$b = 1.0 \text{ cm};$$

$$s = 1.0 \text{ cm};$$

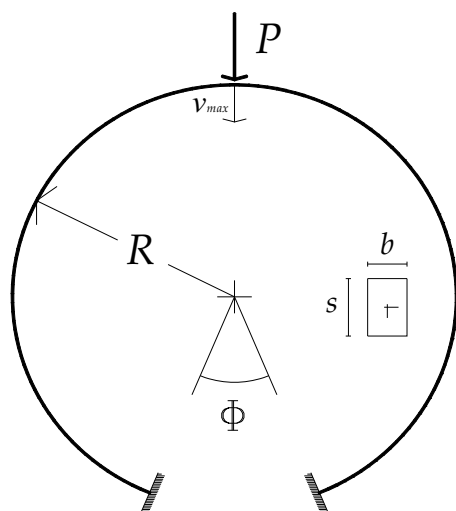
$$R = 100 \text{ cm};$$

Figura V.4.2.4: Ring completo caricato da due forze concentrate autoequilibrate. ($s/R = 1/100$).

s/R	# di elem.	MHC1	err. %	MHC2	err. %
1/100	4	0.8462	15.38	0.8506	14.94
	8	0.9545	4.54	0.9713	2.87
	16	0.9880	1.20	0.9902	0.98
	32	0.9970	0.30	0.9997	0.03

Tabella V.4.2.7: Convergenza per ring completo soggetto a carichi autoequilibrati.

- Ring incompleto incastrato con carico concentrato in mezzeria (Figura V.4.2.5). In Tabella V.4.2.8 si riporta, per *mesh* sempre più fitta, la convergenza alla soluzione di riferimento (si veda *Molari e al., 2005*).



Dati:

$$E = 1.05 \times 10^7 \text{ MPa};$$

$$n = 0.3;$$

$$b = 1.2 \text{ cm};$$

$$s = 0.125 \text{ cm};$$

$$R = 2.935 \text{ cm};$$

$$\Phi = 45^\circ;$$

Figura V.4.2.5: Ring incompleto incastrato con carico concentrato in mezzeria.

# di elem.	MHC1	err. %	MHC2	err. %
4	0.9068	9.32	0.9253	7.47
8	0.9737	2.63	0.9856	1.44
16	0.9935	0.65	0.9978	0.22
32	0.9994	0.06	0.9996	0.04

Tabella V.4.2.8: Convergenza per ring incompleto doppiamente incastrato e soggetto a un carico concentrato in mezzeria.

v.5. Conclusioni

Dai *test* numerici proposti per gli elementi misti – ibridi di trave curva sviluppati si evidenzia una buona convergenza sia per l'elemento *MHC1* che per l'elemento *HMC2*. In particolare si fa notare che mentre l'elemento *HMC1* presenta un'ottima convergenza per strutture con raggio di curvatura variabile ed elevato (come ad esempio la trave ad asse parabolico), l'elemento *MHC2* per travi ad asse circolare o ad arco di cerchio presenta un comportamento migliore in quanto viene utilizzata, per la valutazione delle tensioni tangenziali, l'equazione locale di equilibrio in coordinate polari che risolve esattamente il problema.

Ancora una volta gli elementi proposti sono esenti da *shear* e *membrane locking* e non è necessario introdurre a priori il fattore di correzione a taglio.

Bibliografia

- [1] Ascione L., Fraternali F. 1986. *Sulla statica delle travi ad asse curvo* – Università di Salerno - Facoltà di Ingegneria – Istituto di Ingegneria Civile.
- [2] Banan M.R., Karami G., Farshad M. 1989. *Finite element analysis of curved beams on elastic foundations* – Computer and Structures, **32**: 45-53.
- [3] Bathe K.J. 1996. *Finite element procedures in engineering analysis* – Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [4] Belluzzi O. 1980. *Scienza delle Costruzioni (vol. 3)* – Zanichelli, Bologna.
- [5] Cannarozzi M., Molari L. 2007. *A mixed stress model for linear elastodynamics of arbitrarily curved beams* – International Journal for Numerical Methods in Engineering, DOI: 10.1002/nme.2161.
- [6] Corradi Dell'acqua L. 1992. *Meccanica delle strutture (vol.2) - le teorie strutturali e il metodo degli elementi finiti* – McGraw-Hill, Milano.
- [7] Dorfi H.R., Busby H.R. 1994. *An effective curved composite beam finite element based on the hybrid-mixed formulation* – Computer and Structures, **53**: 43-52.
- [8] Giusti E. 2003. *Analisi matematica 2, 3rd edizione* – Bollati Boringhieri, Torino.
- [9] Kim J.G., Park Y.K. 2006. *Hybrid-mixed curved beam elements with increased degrees of freedom for static and vibration analyses* – International Journal for Numerical Methods in Engineering, **68**: 690-706.
- [10] Kulikov G.M., Plotnikova S.V. 2004. *Non conventional non-linear two-node hybrid stress-strain curved beam elements* – Finite Elements in Analysis and Design, **40**: 1333-1359.
- [11] Lin K.C., Hsieh C.M. 2007. *The closed form general solution of 2-D curved laminated beams of variable curvature* – Composite Structures, **79**: 606-618.
- [12] Marcellini P., Sbordone C. 2002. *Elementi di Analisi Matematica 1* – Liguori, Napoli.
- [13] Marquist J.P., Wang T.M. 1989. *Stiffness matrix of parabolic beam element* – Computer and Structures, **31**: 863-870.

-
- [14] Molari L., Ubertini F. 2005. *A flexibility-based finite element for linear analysis of arbitrarily curved arches* – International Journal for Numerical Methods in Engineering, **65**: 1333-1353.
- [15] Palaninathan R., Chandrasekharan P.S. 1985. *Curved beam element stiffness matrix formulation* – Computer and structures, **21**: 663-669.
- [16] Reissner E. 1972. *On one-dimensional finite strain beam theory: the plane problem* – Journal of Applied Mathematics and Physics, **23**: 795-804.
- [17] Saje M. 1991. *Finite element formulation of finite planar deformation of curved elastic beams* – Computer and Structures, **39**: 327-337.
- [18] Saje M., Placanic I., Turk G., Vratnar B. 1997. *A kinematicallu exact finite element formulation of planar elastic-plastic frames* – Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **144**: 125-511.
- [19] Saleeb A.F., Chang T.Y. 1985. *On the hybrid-mixed formulation of C^0 curved beam elements* – Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **60**: 95-121.
- [20] Suman D., Dipak S. 1988. *Horizontally curved isoparametric element with or without elastic foudation including effect of shear deformazion* – Computer and Structures, **29**: 967-973.
- [21] Timoshenko S., Goodier J.N. 1951. *Theory of Elasticity* – McGraw-Hill, New York.

Appendice A

CAMPI CINEMATICAMENTE AMMISSIBILI

A.1. Criteri di convergenza per il metodo di Rayleigh-Ritz-Galerkin

Per dimostrare la convergenza del metodo di Rayleigh-Ritz-Galerkin è necessario richiamare alcuni concetti di analisi riguardanti gli spazi vettoriali e gli spazi funzionali.

Si definisce spazio vettoriale reale (lineare) un insieme V di vettori o funzioni ed un campo scalare A in cui si possano definire le operazioni di somma tra vettori o funzioni e prodotto di uno scalare per un vettore o una funzione:

$$\begin{aligned}
 &V = \{v_1; v_2; \dots; v_n; \dots\} \text{ e } A = \{\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n; \dots\} \in \mathbb{R} : \\
 &i) \text{ se } (v_i; v_j) \in V \rightarrow (v_i + v_j) \in V \\
 &ii) \text{ se } v_i \in V \text{ e } \alpha_j \in A \rightarrow (\alpha_j \cdot v_i) \in V
 \end{aligned}
 \tag{A.1.1}$$

Inoltre V deve contenere l'elemento nullo.

La dimensione n di V corrisponde al numero di elementi v_i linearmente indipendenti che costituiscono la *base* di V .

Qualunque altro elemento può essere ottenuto mediante combinazione lineare degli elementi della base.

Se per qualsiasi $n \in \mathbb{N}$ esistono in V elementi linearmente indipendenti si dice che lo spazio vettoriale ha dimensione infinita, in questo caso per estendere la nozione di

base occorre introdurre la nozione di convergenza, sono dunque necessari alcuni concetti di analisi funzionale che si introducono di seguito.

- Sia V uno spazio vettoriale, si dice *norma* di un elemento $v \in V$ un'applicazione tale che:

$$\begin{aligned}
 & v \in V \rightarrow \|v\| \in \mathbb{R}^+ \\
 & i) \quad \|v\| > 0 \quad \forall v \in V \\
 & ii) \quad \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0 \in V \\
 & iii) \quad \|\alpha \cdot v\| = |\alpha| \cdot \|v\| \quad \forall v \in V, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \\
 & iv) \quad \|v_i + v_j\| \leq \|v_i\| + \|v_j\| \quad \forall v_i, v_j \in V
 \end{aligned}
 \tag{A.1.2}$$

Ogni norma è convessa ma non necessariamente in senso stretto [‡].

- Un insieme $\{v_1; v_2; \dots; v_n\} \in V$ di elementi si dice *completo* se esistono un numero n di elementi e scalari tali per cui:

$$\left\| v - \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \right\| < \varepsilon \quad \forall v \in V \text{ ed } \varepsilon > 0
 \tag{A.1.3}$$

- Sia $\{v_n\}$ una successione di elementi di V , essa converge a zero rispetto ad una data norma se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\| = 0
 \tag{A.1.4}$$

Una successione $\{v_n\}$ in V si dice di *Cauchy* se:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \mid (i, j) > N \rightarrow \|v_i - v_j\| < \varepsilon
 \tag{A.1.5}$$

Ovvero se $\{v_n\}$ converge ad un elemento $v^* \in V$ allora è una successione di Cauchy infatti:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|v_N - v\| = 0
 \tag{A.1.6}$$

Per la disuguaglianza triangolare (A.1.2.iv) si ha:

$$\|v_i - v_j\| = \|(v_i - v^*) + (v^* - v_j)\| \leq \|v_i - v^*\| + \|v^* - v_j\|
 \tag{A.1.7}$$

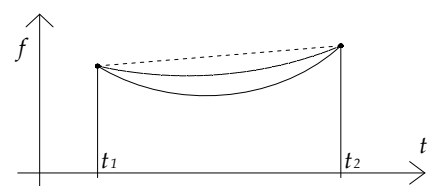
‡ Norma convessa e norma strettamente convessa.

Un'applicazione $f(t)$ è convessa se $\forall (t_1, t_2) \in D(f)$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ con $0 < \lambda < 1$:

$$f[\lambda t_1 + (1 + \lambda)t_2] \leq \lambda f(t_1) + (1 + \lambda)f(t_2)$$

L'applicazione è strettamente convessa se vale il segno $<$.

La (A.1.2.iii) e la (A.1.2.iv) garantiscono solo la convessità.



Mentre però per le successioni numeriche il criterio di Cauchy è condizione necessaria e sufficiente per la convergenza per le successioni di funzioni è soltanto una condizione necessaria.

- Si dice di *Banach* uno spazio vettoriale V normato e *completo* cioè se in esso è definito il concetto di norma di un vettore e se qualunque successione $\{v_n\}$ di Cauchy converge ad un elemento $v^* \in V$. In particolare in uno spazio di funzioni la condizione di completezza è legata alla norma che si assume.

Se uno spazio V non è completo è possibile completarlo aggiungendo gli elementi limite delle successioni $\{v_n\}$ di Cauchy.

Ad esempio lo spazio $C^1[0, 1]$ rappresenta lo spazio di tutte le funzioni reali di una variabile reale continue e dotate di derivata prima continua nell'intervallo $[0, 1]$.

Esso non è completo, infatti considerando v , generica funzione continua in $V \equiv C^1[0, 1]$:

$$\left(\int_0^1 v^2 dx \right)^{1/2} \quad (\text{A.1.8})$$

quindi lo spazio V può essere dotato di norma:

$$\|v\|_{L_2} = \left(\int_0^1 v^2 dx \right)^{1/2} \quad (\text{A.1.9})$$

Se $\{v_n\} = \{x^n\}$ è immediato osservare che:

$$\{v_n\} = \{x^n\} \rightarrow v^* \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases} \quad (\text{A.1.10})$$

quindi converge a una funzione discontinua. Stesso ragionamento è estendibile alla derivata v' di v .

Il completamento dello spazio V , in questo caso, è:

$$H^1[0, 1] \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ v : [0, 1] \Rightarrow \mathbb{R} \mid \int_0^1 (v')^2 dx < +\infty \right\}$$

$$\|\bullet\|_{H^1} = \left(\int_0^1 (v'^2 + v^2) dx \right)^{1/2} \quad (\text{A.1.11})$$

Se uno spazio di *Banach* è dotato di prodotto scalare ovvero valgono le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned}
 & (v, v) : V \times V \Rightarrow \mathbb{R} \quad \left((v, v) = \int_0^1 (v \cdot v) dx \right) \\
 & i) \quad (v, v) \geq 0 \quad \forall v \in V \\
 & ii) \quad (v, v) = 0 \Leftrightarrow v = 0 \in V \\
 & iii) \quad (v_i, v_j) = (v_j, v_i) \quad \forall v_i, v_j \in V \\
 & iv) \quad (\alpha v_i, v_j) = \alpha (v_i, v_j) \quad \forall v_i, v_j \in V, \quad \alpha \in \mathbb{R} \\
 & v) \quad (v_i + v_k, v_j) = (v_i, v_j) + (v_k, v_j) \quad \forall v_i, v_j, v_k \in V
 \end{aligned} \tag{A.1.12}$$

potendo assumere il prodotto scalare come norma $\|\cdot\|_{H_1}$ lo spazio normato e completo

dotato, dalla norma, di prodotto scalare $\|v\|_{H_1} = \left(\int_0^1 (v \cdot v) dx \right)^{1/2}$ si dice di *Hilbert*.

Inoltre si dice *duale* l'insieme di tutti i funzionali lineari e continui definiti in uno spazio lineare dotato di norma ed è anch'esso uno spazio normato. Quindi lo *spazio duale* di H che si indica con H' è composto da tutti i funzionali lineari e continui definiti su H (ad esempio il lavoro dei carichi esterni).

E' quindi possibile precisare, per semplicità con riferimento al caso monodimensionale, cosa si intende per *funzioni cinematicamente ammissibili*.

Lo spazio funzionale V in cui si determina la soluzione comprende tutte le funzioni e relative derivate prime di quadrato sommabile, è dotato di norma indotta dal prodotto scalare interno ovvero è uno spazio di *Hilbert* in cui è definita la forma bilineare:

$$\begin{aligned}
 a(v, v) & \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\ell (EA v'^2 + K v^2) dx < +\infty \\
 \rightarrow V & \equiv H^1[0, \ell] \stackrel{\text{def}}{=} \{v : [0, \ell] \Rightarrow \mathbb{R} \mid a(v, v) < +\infty, v(0) = 0\}
 \end{aligned} \tag{A.1.13}$$

Pertanto volendo scrivere il Principio dei Lavori Virtuali (P.L.V.) o il Principio di Minimo dell'Energia Potenziale Totale (E.P.T.) si ottiene:

$$\begin{aligned}
 P.L.V. & \rightarrow a(u, v) = \ell(v) \quad \forall \{u, v\} \in V \\
 E.P.T. & \rightarrow u_{\text{ex}} \arg \min \Pi(u) = \min \left\{ \frac{1}{2} a(u, u) - \ell(u) \right\} \quad \forall u \in V
 \end{aligned} \tag{A.1.14}$$

Lo spazio V viene denominato *dell'energia* in quanto $\frac{1}{2}a(u, u)$ rappresenta l'energia di deformazione elastica e $\|u\|_{H_1=E} \stackrel{def}{=} \sqrt{a(u, u)}$.

Si deve inoltre osservare che se, come di norma nei problemi elastostatici, nella (A.1.13) $K=0$ si ha:

$$\|u\|_E = \sqrt{a(u, u)} = \left(\int_0^\ell (EAu'^2) dx \right)^{1/2} \quad (\text{A.1.15})$$

con $u(x) = \text{cost.}$ la A.1.15 risulta nulla ovvero si è in presenza di un moto rigido di traslazione, tuttavia avendo posto $u(0) = 0$ si elimina tale possibilità.

In problemi, come quello del Saint Venant, con dati delle sole forze occorre tener conto di questo aspetto nella definizione dello spazio V delle funzioni ammissibili.

In altre parole si deve garantire che le soluzioni che differiscono tra loro di un moto rigido siano equivalenti.

Quindi detto R^* l'insieme delle soluzioni che rappresentano i moti rigidi ($u'=0$ per i casi in una dimensione):

$$V \stackrel{def}{=} \{v[0, \ell] \Rightarrow \mathbb{R} \mid a(v, v) < +\infty \setminus R^*\} \quad (\text{A.1.16})$$

Infine le norme $\|\cdot\|_{H_1}$ e $\|\cdot\|_E$ sono tali per cui esistono due costanti k_1 e k_2 finite e positive tali per cui:

$$\left. \begin{aligned} \|u\|_E &= \sqrt{a(u, u)} \\ \|u\|_{H_1} &= \left(\int_0^\ell (EAu'^2 + Ku^2) dx \right)^{1/2} \end{aligned} \right\} \rightarrow k_1 \|\cdot\|_{H_1} \leq \|\cdot\|_E \leq k_2 \|\cdot\|_{H_1} \quad (\text{A.1.17})$$

La caratterizzazione fin ora introdotta per le funzioni ammissibili non specifica nulla sulla regolarità delle funzioni v , tuttavia è possibile dimostrare che se $v \in H_1(]0, \ell[)$ essa è continua e limitata in $[0, \ell]$ da $\|u\|_{H_1}$.

Nel caso in esame non vi sono particolari problemi in quanto si è posto $v(0)=0$. Tuttavia nell'ipotesi di non avere condizioni essenziali al contorno, ovvero dati nelle sole forze, sono possibili moti rigidi per cui $a(u, u)=0$ e quindi solo a meno di questi ultimi si ha $\|u\|_{H_1} = 0 \Rightarrow u \equiv 0$.

Occorre quindi dimostrare che u è continuo:

$$|u(x)| \leq C \|u\|_{H_1} \quad \forall x \in [0, \ell], C \in \mathbb{R} \quad (\text{A.1.18})$$

La definizione di continuità impone:

$$|u(x_2) - u(x_1)| \leq \varepsilon \quad \text{se } |x_2 - x_1| < \delta(\varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0, \{x_1, x_2\} \in [0, \ell] \quad (\text{A.1.19})$$

Nel caso in cui si pone $EA=1$ e $K=0$ con $x_2 > x_1$ si ha:

$$u(x_2) - u(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{du}{dx} \right) dx \quad (\text{A.1.20})$$

Che applicando la disuguaglianza di *Cauchy-Schwarz* diventa:

$$|u(x_2) - u(x_1)| \leq \left(\int_{x_1}^{x_2} (1)^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{x_1}^{x_2} (u')^2 dx \right)^{1/2} \leq \underbrace{|x_2 - x_1|^{1/2}}_C \|u\|_{H_1} \quad (\text{A.1.21})$$

Che è limitata.

Assumendo che $\delta(\varepsilon) < \varepsilon^2 / \|u\|_{H_1}$ è garantita anche la continuità.

Fino ad ora si sono solo fatti cenni sulle condizioni al contorno che come si è detto possono essere sugli spostamenti (condizioni *essenziali* o *cinematiche*) o sulle forze (condizioni *naturali* o *statiche*).

Le condizioni *essenziali* che devono essere imposte a priori entrando quindi nella definizione delle funzioni cinematicamente ammissibili e dello spazio funzionale dove viene ricercata la soluzione.

In altre parole funzioni che non soddisfano le condizioni al contorno essenziali non possono essere prossime a quelle che le rispettano nella norma di H_1 .

Ad esempio il caso di una biella (Figura A.1.1):

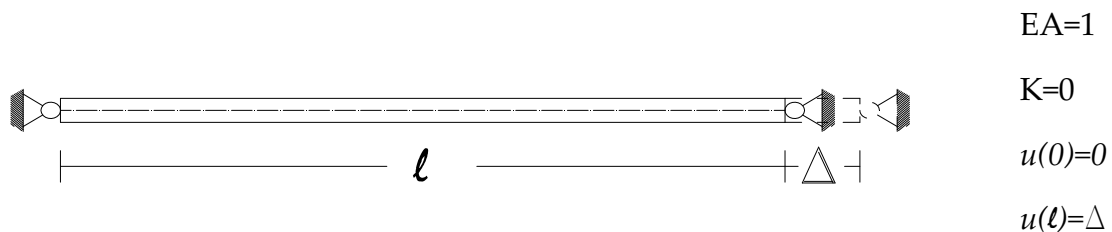


Figura A.1.1: Un caso monodimensionale: la biella.

Le soluzioni $u_1(x)$ e $u_2(x)$ abbiano energia finita e rispettino la condizione omogenea al contorno $u_1(0)=u_2(0)=0$ mentre sia $u_1(\ell)\neq u_2(\ell)$ quindi si ha:

$$u_1(\ell) = \int_0^\ell \left(\frac{du_1}{dx} \right) dx; \quad u_2(\ell) = \int_0^\ell \left(\frac{du_2}{dx} \right) dx$$

$$\left| \int_0^\ell \left(\frac{du_2}{dx} \right) dx - \int_0^\ell \left(\frac{du_1}{dx} \right) dx \right| \stackrel{\text{Schwarz}}{\leq} \left(\int_0^\ell (1)^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^\ell \left(\frac{du_2}{dx} - \frac{du_1}{dx} \right)^2 dx \right)^{1/2} \quad (\text{A.1.22})$$

$$\rightarrow |u_2(\ell) - u_1(\ell)| \stackrel{\text{Schwarz}}{\leq} \ell^{1/2} \|u_2 - u_1\|_E$$

e quindi:

$$\frac{|u_2(\ell) - u_1(\ell)|}{\ell^{1/2}} = \|u_2 - u_1\|_E \rightarrow \|u_2 - u_1\|_E < \varepsilon \quad (\text{A.1.23})$$

In questo caso si ha:

$$v \in \overset{0}{H}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{v \mid a(v, v) < +\infty, v(0) = 0, v(\ell) = 0\} \quad (\text{A.1.24})$$

ovvero le funzioni test v (le variazioni) soddisfano le condizioni omogenee al contorno cioè si pone:

$$\begin{cases} v_{amm} = \bar{u} + v \\ u_{ex} = \bar{u} + u_0 \end{cases} \quad (\text{A.1.25})$$

dove u_0 e v sono omogenee al bordo.

Si vuole determinare $u_0 \in \overset{0}{H}_1$ tale per cui scrivendo il P.L.V. soddisfa:

$$a(u_0, v) = \ell(v) - a(\bar{u}, v) \quad \forall v \in \overset{0}{H}_1 \quad (\text{A.1.26})$$

in questo modo gli spazi di appartenenza delle funzioni test v e trial u_0 sono gli stessi.

Si osservi che nella A.1.26 se $\bar{u} = 0$ si è in presenza di un moto rigido e quindi il termine $a(\bar{u}, v)$ a secondo membro sparisce.

Se si considera il termine essenziale non omogeneo $u(\ell)=\Delta$ si osserva che l'insieme degli elementi di H_1 che soddisfano tale condizione non contenendo l'origine non può costituire un sottospazio di H_1 ed è quindi una varietà lineare. Scrivendo il P.L.V. si ha:

$$\underbrace{\int_0^\ell \left(EA \frac{du_0}{dx} \frac{dv}{dx} \right) dx}_{a(u_0, v)} = \underbrace{\int_0^\ell (qv) dx}_{\ell(v)} - \underbrace{\int_0^\ell \left(EA \frac{d\bar{u}}{dx} \frac{dv}{dx} \right) dx}_{a(\bar{u}, v)} \quad \text{con } v(0) = v(\ell) = 0 \rightarrow \frac{d\bar{u}}{dx} = 0 \quad (\text{A.1.27})$$

Le condizioni *naturali*, a differenza di quelle *essenziali*, sono imposte sul valore al bordo delle derivate delle funzioni u e non producono sottospazi di dimensione inferiore cioè possono essere approssimate da successioni di funzioni che non le verificano a priori. Si deve precisare che mentre $u(x)$ deve essere continuo e limitato du/dx può non esserlo pur restando di quadrato sommabile inoltre le condizioni naturali sono verificate solo in soluzione dove, nel caso della biella, si impone $E Au'(\ell) = \bar{P}$ ed avendo $E Au'(x) = N$ gli sforzi non sono necessariamente continui ma di quadrato sommabile:

$$\int_0^{\ell} N^2 < +\infty \rightarrow N \in L^2 \quad (\text{A.1.28})$$

A.2. Soluzioni approssimate di problemi al contorno

Come visto al paragrafo precedente la formulazione variazionale del problema della determinazione di una funzione $u \in H$ tale che sia:

$$a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in H \quad (\text{A.2.1})$$

Dove H denota uno spazio di Hilbert (completo e dotato di norma $\|\cdot\|_H = (v, v)^{1/2}$ indotta dal prodotto interno), la forma bilineare $a(u, v)$ è continua ($a(u, v) \leq m \|u\|_H \|v\|_H$) e coercitiva ($a(u, u) \geq c \|u\|_H^2, c > 0$), $\ell(v)$ continuo ($\ell(v) \leq m' \|v\|_H$) e H è separabile [‡].

In queste ipotesi è possibile individuare un insieme di n funzioni $\{x_n\}$ tra loro linearmente indipendenti cioè tali per cui il determinante di *Gram* sia non nullo:

$$\det \begin{bmatrix} (x_1, x_1) & (x_1, x_2) & \vdots & (x_1, x_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (x_n, x_1) & (x_n, x_2) & \vdots & (x_n, x_n) \end{bmatrix} \neq 0 \quad (\text{A.2.2})$$

‡ Spazio di Hilbert separabile

Uno spazio di Hilbert si dice separabile se $\exists \{x_n\}$ linearmente indipendenti tali che:

$$\left\| v - \sum_{i=1}^N \alpha_i x_i \right\| < \varepsilon \quad \forall v \in H, N > N_\varepsilon, \varepsilon \in \mathbb{R}^+$$

la separabilità è dunque l'estensione del concetto di base agli spazi di dimensione ∞ e $\{x_n\}$ è detta base.

In questo caso l'insieme delle funzioni $\{x_n\}$ costituisce una base dello spazio di H considerato e si può, tramite il procedimento di orto-normalizzazione di Gram-Schmidt, determinare una base orto-normale dello spazio funzionale.

Gli spazi di Hilbert ($L_2=H_0$, H_1 , H_2 , ecc...) e lo spazio energia sono separabili [‡] quindi se si considera uno spazio di Hilbert in cui si definisce un funzionale lineare, continuo e limitato allora vale il *Teorema di Rappresentazione di Riesz* [†]:

$$F(v): H \Rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \exists \text{ un solo } u \in H \mid (u, v) = F(v) \quad \forall v \in H \quad (\text{A.2.3})$$

‡*Separabilità degli spazi di Hilbert e dello spazio energia.*

Con riferimento al caso monodimensionale l'equazione differenziale che regge il problema è:

$$v'' + Kv = 0$$

più in generale l'operatore risulta essere:

$$L(v) = \frac{d^2(\bullet)}{dx^2} + K(\bullet)$$

ha uno spettro discreto di autovalori ed autofunzioni in 1D

→ Lo spazio a cui appartiene v è separabile.

Stessi risultati si ottengono in 2D e 3D per strutture elastiche e solidi.

†*Teorema di Rappresentazione di Riesz.*

Sia $\{x_n\}$ una base orto-normale e si ponga:

$$u_n = \sum_{i=1}^N \alpha_i x_i$$

con $(u_n, x_i) = \alpha_i$ allora:

$$F(u_n) = (u_n, u_n) = \|u_n\|_H^2 \stackrel{\text{limitato}}{\leq} m \|u_n\|_H \rightarrow \|u_n\|_H \leq m \quad \forall n$$

quindi $\{x_n\}$ è limitata.

Sia $k < n$, $v = u_k$

$$F(u_k) = (u_n, u_k) = (u_k, u_k) = \|u_k\|_H^2 \rightarrow \|u_k\|_H \leq \|u_n\|_H \leq m$$

una serie limitata e monotona converge $\|u_n - u_k\| \rightarrow 0$ per $n, k \rightarrow \infty$

$\{u_n\}$ è quindi una serie di Cauchy ed essendo H completo converge ad un unico elemento

Bibliografia

- [1] Babuška I., Szabò B. 1991. *Finite element analysis* – John Wiley & Sons, New York.
- [2] Banach S. 1932. *Theorie des operation lineaires*. Warszawa.
- [3] Bathe K.J. 1996. *Finite element procedures in engineering analysis* – Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [4] Ralston A. 1965. *A first course in numerical analysis*. McGraw-Hill, New York.
- [5] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. 2000. *The finite element method, 5th edition* – Butterworth-Heinemann, Oxford.

Appendice B

B.1. Analisi delle deformazioni

Nel paragrafo VI.2 si sono introdotti e utilizzati il gradiente di deformazione $\underline{\underline{E}}$, il gradiente di spostamento $\underline{\underline{\hat{H}}}$ e di tensore di deformazione finita di *Green-Lagrange* $\underline{\underline{E}}$ che si riporta di seguito:

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}}). \quad (\text{B.1.1})$$

Sostituendo in (B.1.1) la nota relazione tra gradiente di deformazione e di spostamento $\underline{\underline{\hat{H}}} = \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}}$ si ottiene:

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}[(\underline{\underline{\hat{H}}} + \underline{\underline{I}})^T (\underline{\underline{\hat{H}}} + \underline{\underline{I}}) - \underline{\underline{I}}] = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\hat{H}}}^T + \underline{\underline{\hat{H}}}) + \frac{1}{2}(\underline{\underline{\hat{H}}}^T \underline{\underline{\hat{H}}}) = \underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{1}{2}(\underline{\underline{\hat{H}}}^T \underline{\underline{\hat{H}}}), \quad (\text{B.1.2})$$

nella (B.1.2) si riconosce il tensore di deformazione infinitesima $\underline{\underline{\varepsilon}}$ e un secondo tensore, $(\underline{\underline{\hat{H}}}^T \underline{\underline{\hat{H}}})$, detto tensore destro di *Cauchy-Green*, che tiene conto dei termini non lineari. Esprimendo il tensore di *Green-Lagrange* in termini di componenti del campo di spostamenti si ha:

$$\begin{cases} e_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2}(\underline{u}_{,x}^T \underline{u}_{,x}), & e_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{2}(\underline{u}_{,y}^T \underline{u}_{,y}), & e_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{2}(\underline{u}_{,z}^T \underline{u}_{,z}), \\ g_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{1}{2}(\underline{u}_{,x}^T \underline{u}_{,y}) + \frac{1}{2}(\underline{u}_{,y}^T \underline{u}_{,x}), \\ g_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{1}{2}(\underline{u}_{,x}^T \underline{u}_{,z}) + \frac{1}{2}(\underline{u}_{,z}^T \underline{u}_{,x}), \\ g_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{1}{2}(\underline{u}_{,y}^T \underline{u}_{,z}) + \frac{1}{2}(\underline{u}_{,z}^T \underline{u}_{,y}). \end{cases} \quad (\text{B.1.3})$$

In particolare nella (B.1.3) si ha:

$$\underline{u}_{,x} = \begin{bmatrix} u_{x,x} \\ u_{y,x} \\ u_{z,x} \end{bmatrix}, \quad \underline{u}_{,y} = \begin{bmatrix} u_{x,y} \\ u_{y,y} \\ u_{z,y} \end{bmatrix}, \quad \underline{u}_{,z} = \begin{bmatrix} u_{x,z} \\ u_{y,z} \\ u_{z,z} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.1.4})$$

e quindi il tensore di deformazione di *Green-Lagrange* può essere scomposto in una parte lineare e una non lineare, nella prima sono contenuti i termini che danno origine, in un approccio classico agli spostamenti, alla matrice di rigidezza elastica \underline{K}_e , nella seconda compaiono i termini che danno origine alla matrice di rigidezza geometrica \underline{K}_g .

L'energia di deformazione associata ai termini del secondo ordine risulta infatti:

$$\Phi_g = \frac{1}{2} \int_{\beta_e} \begin{bmatrix} \underline{u}_{,x}^T & \underline{u}_{,y}^T & \underline{u}_{,z}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{yx} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{zy} & S_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_{,x} \\ \underline{u}_{,y} \\ \underline{u}_{,z} \end{bmatrix} dV, \quad (\text{B.1.5})$$

nella (B.1.5) il tensore $\hat{\underline{S}}$ rappresenta il 2° tensore degli sforzi di *Piola-Kirchhoff*.

Quindi, procedendo come di consueto alla discretizzazione del campo di spostamenti e imponendo poi la stazionarietà rispetto agli spostamenti (nodali), si ottiene:

$$K_g = \int_{\beta_e} \left(\underline{L}^T \hat{\underline{S}} \underline{L} \right) dV. \quad (\text{B.1.6})$$

Dove, per comodità di notazione, si indica con \underline{L} la matrice delle derivate delle funzioni di forma che interpolano i campi di spostamenti. In realtà i termini non lineari da considerare dipendono dal tipo di problema che si vuole affrontare e, molto spesso, è possibile omettere nelle equazioni da utilizzare parecchi termini del secondo ordine con un notevole vantaggio dal punto di vista computazionale.

Per esempio per determinare il carico critico di travi piane, (Figura B.1.1) al fine di determinare la matrice di rigidezza geometrica \underline{K}_g è sufficiente considerare il solo termine del secondo ordine:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{ds_y}{dz} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{du_y}{dz} \right)^2. \quad (\text{B.1.7})$$

Nella (B.1.7) si indica con u_y lo spostamento trasversale all'asse della trave del generico punto dell'asse stesso.

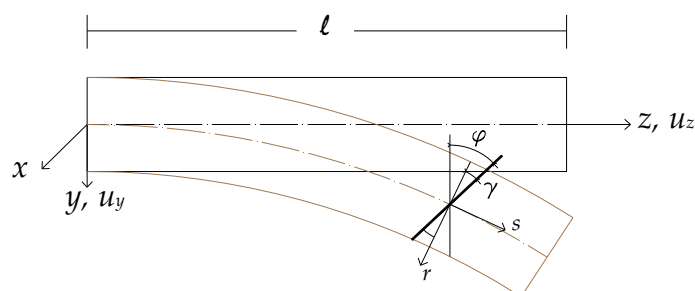


Figura B.1.1: Cinematica della trave in deformazioni finite.

Come mostrato nel Capitolo IV il campo di spostamenti per ogni punto del solido trave è riconducibile, nel caso della ricerca del carico critico di travi piane, alle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} s_z = u_z(z) + y\varphi(z) \\ s_y = u_y(z) \end{cases} \quad (\text{B.1.8})$$

Nella (B.1.8) sono indicate con s_z e s_y le componenti di spostamento dei punti del solido trave, con u_z , u_y gli spostamenti assiale e trasversale, rispettivamente, del generico punto della linea d'asse e con φ la rotazione della sezione trasversale φ . Procedendo, a partire da questi campi di spostamenti, alla determinazione dei termini non nulli del tensore di deformazione di *Green-Lagrange* si ottiene:

$$\begin{cases} e_z = \frac{ds_z}{dz} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{ds_z}{dz} \right)^2 + \left(\frac{ds_y}{dz} \right)^2 \right] \\ g_{yz} = \frac{ds_z}{dy} + \frac{ds_y}{dz} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{ds_z}{dy} \frac{ds_z}{dz} \right) + \left(\frac{ds_y}{dy} \frac{ds_y}{dz} \right) \right]. \end{cases} \quad (\text{B.1.9})$$

Il tensore \underline{E} è così completo in tutti i termini del secondo ordine.

Tuttavia, assumendo l'ipotesi di spostamenti finiti ma di entità limitata, i termini quadratici delle derivate sono trascurabili quando compaiono anche linearmente nelle stesse equazioni.

Sulla base di queste osservazioni le (B.1.9) diventano:

$$\begin{cases} e_z = \frac{ds_z}{dz} + \frac{1}{2} \left(\frac{ds_y}{dz} \right)^2 = \frac{ds_z}{dz} + \frac{1}{2} \left(\frac{du_y}{dz} \right)^2 \\ g_{yz} = \frac{ds_z}{dy} + \frac{ds_y}{dz}. \end{cases} \quad (\text{B.1.10})$$

Come riportato nella (B.1.7).

Se si scrive l'espressione dell'Energia Potenziale Totale [si veda *Corradi; 1992, Washizu; 1982*] si ha:

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{mod}}^{HW} &= \Phi(\underline{\varepsilon}) - L_{\text{ext}}(\underline{v}) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\ell \left[EA \left(\frac{du_z^0}{dz} + \frac{1}{2} \left(\frac{du_y}{dz} \right)^2 \right)^2 + EJ \left(\frac{d\varphi}{dz} \right)^2 + GA_s \left(\frac{du_y}{dz} + \varphi \right)^2 \right] dz - L_{\text{ext}}. \end{aligned} \quad (\text{B.1.11})$$

Dalla (B.1.11) si determinano quindi le condizioni di *Eulero-Lagrange*. Si osservi, inoltre, che la (B.1.7) per il caso di trave sottile in cui si ha che $\gamma \simeq 0$ equivale a considerare la nota equazione di equilibrio:

$$EJu_y^{IV} + Pu_y^{II} = 0. \quad (\text{B.1.12})$$

Analogamente, per il caso della determinazione del carico critico della piastra, (Figura B.1.2) per determinare la matrice di rigidezza geometrica \underline{K}_g sono sufficienti i seguenti termini del secondo ordine in e_x , e_y e g_{xy} rispettivamente:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{du_z}{dx} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{ds_z}{dx} \right)^2; \quad \frac{1}{2} \left(\frac{ds_z}{dy} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{du_z}{dy} \right)^2; \quad \frac{1}{2} \left(\frac{ds_z}{dy} \frac{ds_z}{dx} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{du_z}{dy} \frac{du_z}{dx} \right). \quad (\text{B.1.13})$$

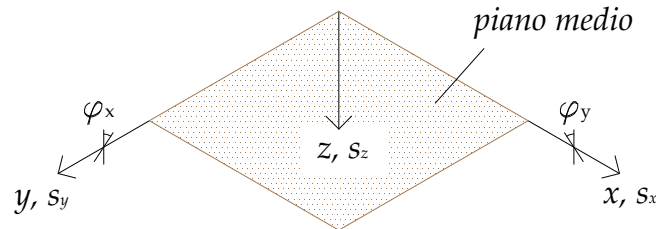


Figura B.1.2: Piano medio della piastra (piana) e componenti di spostamento.

Come riportato nel Capitolo I le componenti del campo di spostamenti sono:

$$\begin{cases} s_x(x, y, z) = u_x(x, y) - z \cdot \varphi_x(x, y) \\ s_y(x, y, z) = u_y(x, y) - z \cdot \varphi_y(x, y) \\ s_z(x, y, z) = u_z(x, y), \end{cases} \quad (\text{B.1.14})$$

nella (B.1.14) s_x, s_y, s_z rappresentano le componenti di spostamento dei punti del solido piastra, u_x, u_y, u_z gli spostamenti dei punti del piano medio, mentre con φ_x e φ_y le rotazioni nelle direzioni coordinate di segmenti originariamente ortogonali al piano medio.

Procedendo come visto per il caso della trave piana, a partire dai campi di spostamenti, si determinano le componenti non nulle del tensore di deformazione di *Green-Lagrange*:

$$\left\{ \begin{array}{l} e_x = \frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial s_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial s_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial s_z}{\partial x} \right)^2 \right] \\ e_y = \frac{\partial s_y}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial s_x}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial s_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial s_z}{\partial y} \right)^2 \right] \\ g_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_x}{\partial y} + \frac{\partial s_y}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial s_x}{\partial x} \frac{\partial s_x}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial s_y}{\partial x} \frac{\partial s_y}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial s_z}{\partial x} \frac{\partial s_z}{\partial y} \right) \right] \\ g_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_x}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial s_x}{\partial x} \frac{\partial s_x}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial s_y}{\partial x} \frac{\partial s_y}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial s_z}{\partial x} \frac{\partial s_z}{\partial z} \right) \right] \\ g_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_z}{\partial y} + \frac{\partial s_y}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial s_x}{\partial y} \frac{\partial s_x}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial s_y}{\partial y} \frac{\partial s_y}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial s_z}{\partial y} \frac{\partial s_z}{\partial z} \right) \right]. \end{array} \right. \quad (\text{B.1.15})$$

Anche questa volta, introducendo l'ipotesi di spostamenti e rotazioni finiti ma di entità limitata, e osservando che i restanti contributi del secondo ordine nelle derivate di s_x e s_y (dell'ordine del quadrato delle deformazioni membranali) sono anch'essi piccoli rispetto alle rotazioni della superficie media è possibile dimostrare le (B.1.13) infatti:

$$\left\{ \begin{array}{l} e_x = \frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial s_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial s_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial s_z}{\partial x} \right)^2 \right] \simeq \frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_z}{\partial x} \right)^2 \\ e_y = \frac{\partial s_y}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial s_x}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial s_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial s_z}{\partial y} \right)^2 \right] \simeq \frac{\partial s_y}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_z}{\partial y} \right)^2 \\ g_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_x}{\partial y} + \frac{\partial s_y}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial s_x}{\partial x} \frac{\partial s_x}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial s_y}{\partial x} \frac{\partial s_y}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial s_z}{\partial x} \frac{\partial s_z}{\partial y} \right) \right] \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_x}{\partial y} + \frac{\partial s_y}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_z}{\partial x} \frac{\partial s_z}{\partial y} \right) \\ g_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_x}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial s_x}{\partial x} \frac{\partial s_x}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial s_y}{\partial x} \frac{\partial s_y}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial s_z}{\partial x} \frac{\partial s_z}{\partial z} \right) \right] \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_x}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial x} \right) \\ g_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_z}{\partial y} + \frac{\partial s_y}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial s_x}{\partial y} \frac{\partial s_x}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial s_y}{\partial y} \frac{\partial s_y}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial s_z}{\partial y} \frac{\partial s_z}{\partial z} \right) \right] \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_z}{\partial y} + \frac{\partial s_y}{\partial z} \right). \end{array} \right. \quad (\text{B.1.16})$$

Sempre in analogia al caso delle trave piana, scrivendo, nel caso delle piastre sottili (ipotesi di *Kirchhoff-Love*), l'Energia Potenziale Totale e ricavando le condizioni di

Eulero-Lagrange si ottengono le seguenti equazioni che in letteratura fanno parte della teoria del secondo ordine alla *von Kármán* [si veda *Corradi; 1992*]:

$$\left\{ \begin{array}{l} a) \quad D\nabla_4 u_z = p + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \quad \text{in } A \\ b) \quad \nabla_4 \Phi = Es \left[\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right] \quad \text{in } A \end{array} \right. \quad (\text{B.1.17})$$

Nelle (B.1.17) $D = Es^3/12(1-\nu^2)$ rappresenta la rigidezza flessionale di piastra, $\Phi = \Phi(x, y)$ è una funzione di sforzo da cui, tramite doppia derivazione parziale, è possibile determinare le componenti generalizzate delle azioni interne, E è il modulo elastico ν il coefficiente di Poisson ed s lo spessore della piastra.

Si osservi, inoltre, che se si trascurano i termini non lineari la (B.1.17.a) diventa la nota equazione di *Sophie Germain-Lagrange*.

B.2. Problemi agli autovalori

La determinazione del carico critico Euleriano e delle deformate critiche di travi e piastre viene classicamente ricondotto a un'analisi agli autovalori [si veda *Bathe; 1996*].

Di seguito si ricordano brevemente le definizioni di *autovalori* ed *autovettori* di una matrice quadrata \underline{A} :

$$\underline{A}\underline{v} = \lambda\underline{v}, \quad (\text{B.2.1})$$

nella (B.2.1) \underline{A} è la matrice quadrata di cui si vogliono determinare gli autovalori λ e gli autovettori \underline{v} . Quindi un numero reale o complesso λ è un autovalore di \underline{A} se e solo se esiste una ennupla non nulla \underline{v} tale che sia soddisfatta la (B.2.1).

Valgono inoltre le seguenti proprietà (solo enunciate):

- Se la matrice quadrata \underline{A} è definita positiva o semi-definita positiva allora $\lambda \geq 0$ (il segno di uguaglianza si ha per il caso semi-definita positiva);
- Se la matrice quadrata \underline{A} è simmetrica tutti gli autovalori λ sono numeri reali;

- Se la matrice quadrata $\underline{\underline{A}}$ è simmetrica tutti gli autovettori $\underline{\underline{v}}$ fanno parte di una base ortogonale che genera l'autospazio di $\underline{\underline{A}}$ ($\underline{\underline{v}}_i \cdot \underline{\underline{v}}_j = \delta_{ij}$).

Se si considera ora il problema delle strutture nello specifico si ha il seguente problema *generalizzato agli autovalori*:

$$\left[\underline{\underline{K}}_e - \lambda \underline{\underline{K}}_g \right] \underline{\underline{\varphi}} = \underline{\underline{0}}. \quad (\text{B.2.2})$$

Nella (B.2.2) $\underline{\underline{K}}_e$ e $\underline{\underline{K}}_g$ rappresentano, rispettivamente, la matrice di rigidezza elastica e geometrica della struttura considerata, λ e $\underline{\underline{\varphi}}$ sono, invece, gli autovalori e autovettori.

Dal momento che, come noto, sia $\underline{\underline{K}}_e$ che $\underline{\underline{K}}_g$ sono simmetriche e quanto meno semi-definita positiva [†] valgono tutte le proprietà sopra citate e in particolare scrivendo la (B.2.2) in forma completamente matriciale si ha:

$$\left[\underline{\underline{K}}_e - \underline{\underline{\Lambda}} \underline{\underline{K}}_g \right] \underline{\underline{\Phi}} = \underline{\underline{0}}, \quad (\text{B.2.3})$$

nella (B.2.3) la matrice $\underline{\underline{\Phi}}$ ha come righe ovvero colonne gli autovettori mentre la matrice diagonale $\underline{\underline{\Lambda}}$ ha come elementi non nulli gli autovalori.

Volendo ora determinare gli autovalori si deve risolvere il *polinomio caratteristico* di seguito riportato:

$$p(\lambda) = \det \left[\underline{\underline{K}}_e - \lambda \underline{\underline{K}}_g \right] = 0. \quad (\text{B.2.4})$$

La (B.2.4) corrisponde alla risoluzione del problema *generalizzato agli autovalori*.

Se al posto della matrice identità $\underline{\underline{K}}_g$ si sostituisce la matrice identità $\underline{\underline{I}}$ e si ha:

$$\left[\underline{\underline{K}}_e - \lambda \underline{\underline{I}} \right] \underline{\underline{\varphi}} = \underline{\underline{0}}, \quad (\text{B.2.6})$$

noto come *problema standard agli autovalori*.

È possibile passare dalla forma *standard* a quella *generalizzata* del problema agli autovalori semplicemente ricorrendo alla fattorizzazione della matrice $\underline{\underline{K}}_g$ secondo *Cholesky*:

$$\underline{\underline{K}}_g = \underline{\underline{Z}}^T \underline{\underline{Z}} \rightarrow \left[\underline{\underline{K}}_e - \lambda \underline{\underline{K}}_g \right] \underline{\underline{\varphi}} = \left[\underline{\underline{K}}_e - \lambda \underline{\underline{Z}}^T \underline{\underline{Z}} \right] \underline{\underline{\varphi}} = \underline{\underline{0}}, \quad (\text{B.2.7})$$

se si pone che $\tilde{\varphi} = \underline{Z}^T \varphi$ si ottiene:

$$\underline{Z}^{-1} \underline{K} \underline{Z}^{-T} \underline{Z}^T \varphi - \underline{S}^{-1} \lambda \underline{Z} \underline{Z}^T \varphi = \underline{0} \rightarrow [\tilde{\underline{K}} - \lambda \underline{I}] \tilde{\varphi} = \underline{0}. \quad (\text{B.2.8})$$

Nei sistemi strutturali le soluzioni del problema agli autovalori λ_i rappresentano i carichi critici in corrispondenza dei quali la soluzione del sistema ($\underline{K}q = \underline{Q}$) non è più unica ($\det[\underline{K}] = 0$) mentre gli autovettori φ_i rappresentano i modi critici.

Bibliografia

- [1] Babuška I., Szabò B. 1991. *Finite element analysis* – John Wiley & Sons, New York.
- [2] Bathe K. J. 1996. *Finite element procedures in engineering analysis* – Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [3] Corradi Dell'acqua L. 1992. *Meccanica delle strutture (vol.2) "le teorie strutturali e il metodo degli elementi finiti"* – McGraw-Hill, Milano.
- [4] Corradi Dell'acqua L. 1992. *Meccanica delle strutture (vol.3) "la valutazione della capacità portante"* – McGraw-Hill, Milano.
- [1] Washizu K. 1982. *Variational Methods in elasticity and plasticity* – Pergamon Press, Oxford.
- [5] Wilson E. L. 2000. *Three dimensional static and dynamic analysis of structures, 3rd edition* – Computers and Structures, Berkeley.
- [6] Zienkiewicz O. C., Taylor R. L. 2000. *The finite element method, 5th edition* – Butterworth-Heinemann, Oxford.

Appendice C

C.1. Frattura di un composito laminato secondo il modo I

La frattura secondo il modo I, studiata mediante il *DCB test*, prevede una delaminazione che, considerata la simmetria del problema, viene ben rappresentato dal modello di Obreimoff (1930) di distacco di una lamina (Figura C.1.1) [Gambarotta e al., 2003].

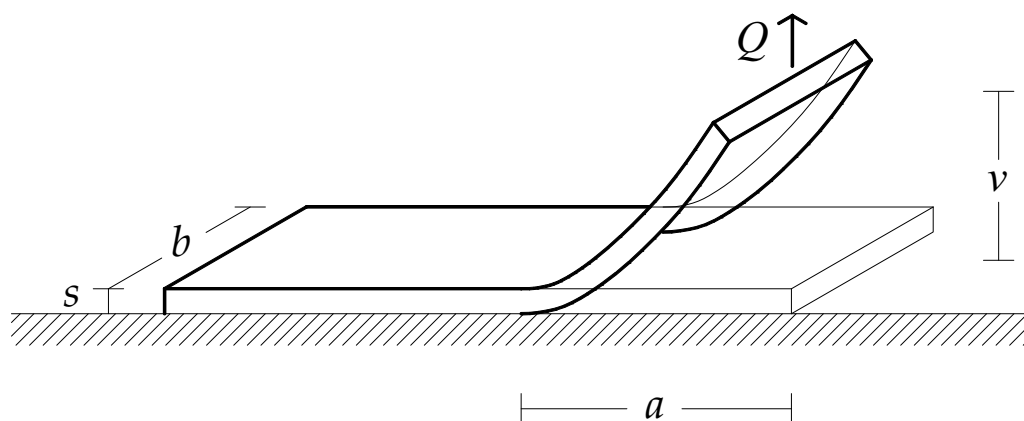


Figura C.1.1: Distacco di una lamina elastica per applicazione di un carico Q o di uno spostamento v . La lamina di spessore s e larghezza b è connessa al semipiano rigido inferiore con l'eccezione del tratto lungo a . Applicando una forza Q o uno spostamento v la lamina si inflette come riportato in Figura C.1.1.

L'analisi dello stato di tensione nel punto di distacco evidenzia, nelle ipotesi della meccanica della frattura lineare, dei valori illimitati delle tensioni, di conseguenza

ogni criterio di resistenza in termini di stato tensionale evidenzerebbe resistenza nulla al meccanismo di delaminazione.

Una valida alternativa è considerare il processo di decoesione come quasi statico governato dalla variabile irreversibile a .

Se si assume, associata al distacco tra semipiano e lamina, una densità superficiale di energia di frattura γ e si considera incastrata la sezione di distacco della lamina, una volta imposto v , si ottiene:

$$Q = \frac{3EJ}{a^3} \cdot v = \frac{Ebs^3}{4a^3} \cdot v. \quad (\text{C.1.1})$$

Mentre l'energia potenziale elastica, ricavata mediante l'applicazione del teorema di Clapeyron, risulta:

$$\Phi = \frac{Qv}{2} = \frac{Ebs^3}{8a^3} \cdot v^2, \quad (\text{C.1.2})$$

infine, l'energia di frattura è:

$$\Gamma = \gamma \cdot b \cdot a. \quad (\text{C.1.3})$$

Procedendo ora in modalità quasi statiche, per un accrescimento infinitesimo $da > 0$ della zona delaminata, il bilancio dell'energia si scrive:

$$\frac{\partial L_{ext}}{\partial a} = \frac{\partial \Phi}{\partial a} + \frac{\partial \Gamma}{\partial a}, \quad (\text{C.1.4})$$

quindi, ricordando la definizione di energia potenziale totale $\Pi = \Phi - L_{ext}$, l'equazione di bilancio (C.1.4) diventa:

$$\hat{G} = -\frac{\partial \Pi}{\partial a} = \gamma \cdot b. \quad (\text{C.1.5})$$

La (C.1.5) rappresenta l'uguaglianza tra energia rilasciata \hat{G} e energia di frattura nell'accrescimento infinitesimo della delaminazione.

Se si opera a spostamento impresso v il termine $\partial L_{ext}/\partial a$ risulta nullo e quindi si ha:

$$\hat{G} = -\frac{\partial \Pi}{\partial a} = -\frac{\partial \Phi}{\partial a} = \frac{3Ebs^3}{8a^4} \cdot v^2 = \gamma \cdot b \rightarrow \begin{cases} v_{crit} = \sqrt{\frac{8\gamma}{3Es^3}} \cdot a^2, \\ Q_{crit} = \sqrt{\frac{Es^3\gamma}{6}} \cdot \frac{b}{a}. \end{cases} \quad (\text{C.1.6})$$

Le (C.1.6) forniscono i valori di spostamento v e di carico critico Q per la propagazione della frattura.

In Figura C.1.2 si riporta la curva carico spostamento che si ottiene dalle (C.1.6).

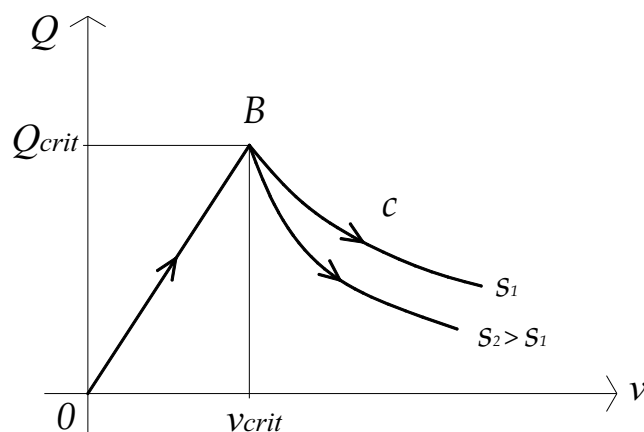


Figura C.1.2: Curva carico spostamento (Q - v). Si noti che al crescere di s la delaminazione si presenta con rami discendenti sempre più fragili (effetto scala).

Si osservi che fino al momento in cui lo spostamento impresso è inferiore a quello critico ($v < v_{crit}$) la lamina si deforma senza decoesione, quando invece si ha $v \geq v_{crit}$ la delaminazione parte seguendo la curva c che ha la seguente equazione:

$$Q = 2 \cdot \sqrt[4]{\frac{2Es^3\gamma}{3}} \cdot \frac{b}{\sqrt{v}} \quad (\text{C.1.7})$$

Se, in un'analisi ad elementi finiti, si opera incrementando mano a mano il carico (controllo di forza) si ha perdita di convergenza al raggiungimento di Q_{crit} in quanto, raggiunta la condizione di delaminazione, la resistenza diminuisce e quindi la condizione risulta instabile. Per questo motivo si è scelto (come detto nel paragrafo IV.5.1.2) di utilizzare procedure che prevedono un incremento dello spostamento (Figura C.1.3) capaci di cogliere i rami *softening* in *snap-trough* oppure se si vogliono cogliere anche gli eventuali rami *softening* in *snap-back* si è scelto di utilizzare la procedura *arc-length* (C.1.4.a.b).

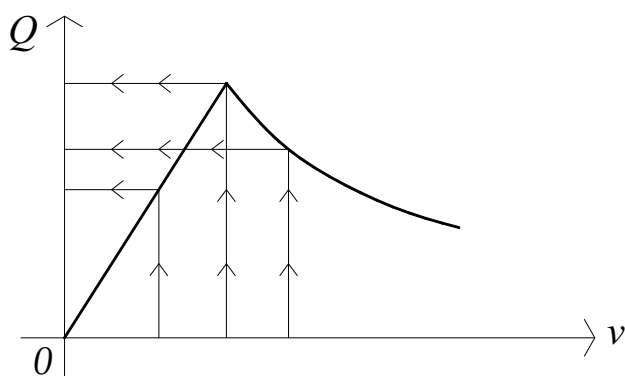


Figura C.1.3: Controllo si spostamento, *snap-trough*.

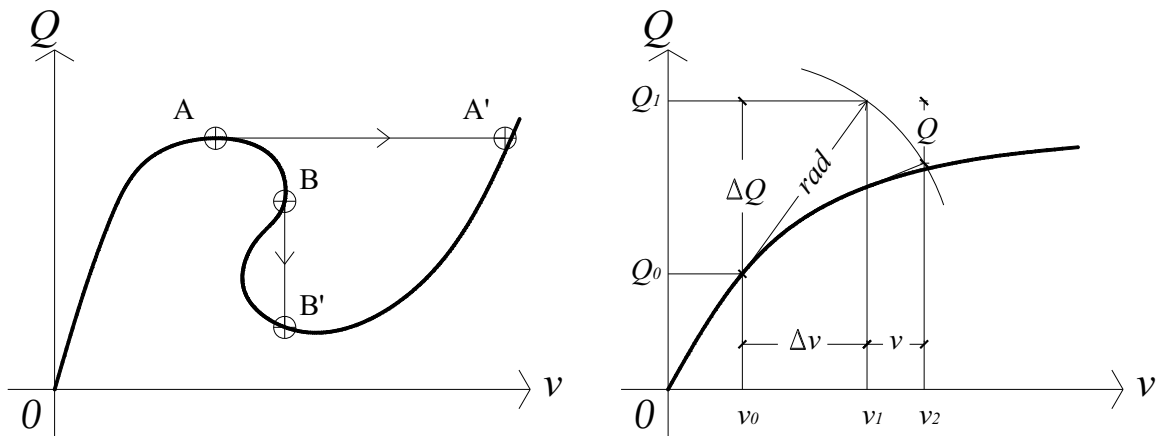


Figura C.1.3: a) Schema di *snap-back*. b) Controllo misto carico spostamento, *arc-length*.

In Figura C.1.3.a si nota come una procedura in controllo di forza (incrementando Q) non consente di cogliere il ramo discendente AB in *snap-trough* che viene totalmente saltato passando dal punto A al punto A' della curva. Analogamente, procedendo in controllo di spostamento (incrementando v), non si coglie il ramo discendente in *snap-back*, si passa, infatti, direttamente dal punto B al punto B' .

Il metodo *arc-length* come si vede nello schema in Figura C.1.3.b consiste in una procedura simile al metodo di *Newton-Raphson* con la differenza che, al momento di calcolare il residuo, si introduce una variabile aggiuntiva λ che modula l'intensità dei carichi esterni applicati in modo che l'equazione di equilibrio risulti:

$$res(v, \lambda) = \underline{S}(v) - \lambda \underline{Q}, \quad (C.2.8)$$

nella (C.1.8) \underline{Q} rappresenta il vettore delle forze nodali esterne mentre $\underline{S}(v)$ rappresenta le forze nodali interne.

Avendo introdotto la nuova variabile λ e dunque imponendo una condizione aggiuntiva, nel caso di *arc-length* sferico, si ha la seguente equazione di vincolo [Bonet, Wood; 1997]:

$$\Delta \underline{v}^T \Delta \underline{v} + \Delta \lambda^2 \psi^2 \underline{Q}^T \underline{Q} = rad, \quad (C.1.9)$$

i parametri che compaiono nella (C.1.9) sono rappresentati in Figura C.1.3.b mentre ψ^2 rappresenta un fattore di scala [Crisfield; 2000].

Bibliografia

- [1] Bonet J., Wood R. D. 1997. *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis* – Cambridge University Press, Cambridge.
- [2] Crisfield M.A. 2000. *Non Linear Finite Element Analysis of Solid and Structures* – John Wiley & Sons, Chichester.
- [3] Gambarotta L., Nunziante L., Tralli A. 2003. *Scienza delle costruzioni* – McGraw-Hill, Milano.



Appendice D

D.1. Formule di Frénet

In questa Appendice si riportano le relazioni di base che consentono di determinare le formule di Frénet utilizzate nel Capitolo V.

Si consideri una curva C regolare di equazione parametrica $\underline{x} = \underline{x}(s)$ funzione dell'ascissa curvilinea s . Il vettore $\underline{e}_3 = d\underline{x}/ds$ ha la direzione della tangente alla curva nel punto $\underline{x}(s)$, il verso concorde con quello delle s crescenti ed il primo dei tre versori, a due a due ortogonali tra loro, che possono pensarsi associati a ciascun punto della curva, dando così origine ad una terna ortonormale di vettori che prende il nome di *terna fondamentale* (Figura D.1.1).

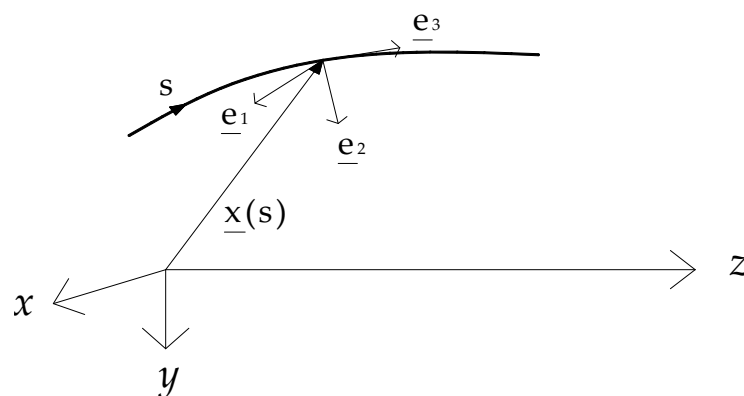


Figura D.1.1: Curva C nello spazio.

Il secondo versore fondamentale \underline{e}_2 può definirsi come il vettore unitario, che ha la direzione e il verso di $d^2\underline{x}/ds^2$, cioè:

$$\underline{e}_2 = \frac{d^2\underline{x}/ds^2}{\|d^2\underline{x}/ds^2\|}. \quad (\text{D.1.1})$$

Il vettore \underline{e}_2 è ortogonale ad \underline{e}_3 in quanto ha la direzione della derivata del vettore \underline{e}_3 . Il terzo versore fondamentale \underline{e}_1 si definisce come il vettore unitario ortogonale sia ad \underline{e}_3 che ad \underline{e}_2 , il cui verso è tale per cui la terna $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ risulti levogira (i tre versori così definiti prendono rispettivamente il nome di versore *binormale*, *normale* e *tangente*, i piani che originano prendono invece i nomi di piano *osculatore*, *normale* e *rettificante*).

D.1.1. Curvatura e torsione di una curva

Si definisce *curvatura* di una curva in un punto $\underline{x}(s)$ il limite per $\Delta s \rightarrow 0$ del rapporto $\Delta\Phi/\Delta s$ fra l'angolo $\Delta\Phi$ formato dalla tangente alla curva nel punto $\underline{x}(s)$ con la tangente nel punto $\underline{x}(s+\Delta s)$ e la lunghezza Δs dell'arco delimitato dai due punti suddetti (Figura D.1.1.1):

$$\frac{1}{R} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\Phi}{\Delta s} \right|. \quad (\text{D.1.1.1})$$

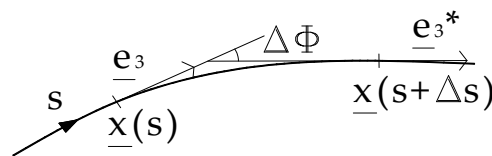


Figura D.1.1.1: Curva C nello spazio.

Ovviamente si ha che:

$$\sin|\Delta\Phi| = \|\underline{e}_3 \times \underline{e}_3^*\|, \quad (\text{D.1.1.2})$$

quindi, dal momento che per $\Delta s \rightarrow 0$ si ha che $\sin|\Delta\Phi| = \Delta\Phi$, si ottiene:

$$\frac{1}{R} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left\| \frac{\underline{e}_3 \times \underline{e}_3^*}{\Delta s} \right\|. \quad (\text{D.1.1.3})$$

Approssimando \underline{e}_3^* con uno sviluppo in serie di *Taylor* troncato al primo ordine si ha:

$$\underline{e}_3^* = \underline{e}_3 + \Delta s \left(\frac{d\underline{e}_3}{ds} + \underline{\varepsilon} \right) \rightarrow \underline{e}_3 \times \underline{e}_3^* = \Delta s \left(\underline{e}_3 \times \frac{d\underline{e}_3}{ds} + \underline{e}_3 \times \underline{\varepsilon} \right) \rightarrow \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\underline{e}_3 \times \underline{e}_3^*}{\Delta s} = \underline{e}_3 \times \frac{d\underline{e}_3}{ds}, \quad (\text{D.1.1.4})$$

in definitiva, ricordando che \underline{e}_3 è un versore e che i due vettori \underline{e}_3 e $d\underline{e}_3/ds$ sono ortogonali, consegue che (1° formula di Frénet):

$$\frac{1}{R} = \frac{d\underline{e}_3}{ds} = \frac{d^2 \underline{x}}{ds^2} \rightarrow \underline{e}_2 = R \frac{d^2 \underline{x}}{ds^2}. \quad (\text{D.1.1.5})$$

Si definisce invece *torsione* di una curva il limite per $\Delta s \rightarrow 0$ del rapporto $\Delta\Psi/\Delta s$ fra l'angolo $\Delta\Psi$ formato dai piani osculatori alla curva nei punti $\underline{x}(s)$ e $\underline{x}(s+\Delta s)$ e il corrispondente arco Δs . Tale angolo coincide con l'angolo formato dai versori binormali \underline{e}_1 ed \underline{e}_1^* rispettivamente in $\underline{x}(s)$ e $\underline{x}(s+\Delta s)$. Se si procede in modo analogo al caso precedente della curvatura si perviene alla seguente relazione:

$$\frac{1}{\tau} = \left\| \frac{d\underline{e}_1}{ds} \right\|. \quad (\text{D.1.1.6})$$

Derivando ora rispetto ad s la relazione $\underline{e}_1 \cdot \underline{e}_3 = 0$, si ottiene:

$$\frac{d\underline{e}_1}{ds} \cdot \underline{e}_3 + \frac{d\underline{e}_3}{ds} \cdot \underline{e}_1 = 0 \rightarrow \frac{d\underline{e}_1}{ds} \cdot \underline{e}_3 + \frac{1}{R} \frac{d\underline{e}_1}{ds} \cdot \underline{e}_1 = \frac{d\underline{e}_1}{ds} \cdot \underline{e}_3 = 0, \quad (\text{D.1.1.7})$$

ovvero il vettore $d\underline{e}_1/ds$ è ortogonale al versore \underline{e}_3 e quindi parallelo al versore \underline{e}_2 , quindi si può affermare che (2° formula di Frénet):

$$\frac{d\underline{e}_1}{ds} = +\frac{1}{\tau} \cdot \underline{e}_2. \quad (\text{D.1.1.8})$$

L'ultima formula di Frénet si può dimostrare derivando rispetto ad s l'espressione:

$$\underline{e}_2 = \underline{e}_3 \times \underline{e}_1, \quad (\text{D.1.1.9})$$

infatti si ottiene:

$$\frac{d\underline{e}_2}{ds} = \frac{d\underline{e}_3}{ds} \times \underline{e}_1 + \underline{e}_3 \times \frac{d\underline{e}_1}{ds}, \quad (\text{D.1.1.10})$$

sostituendo nella (D.1.1.10) le (D.1.1.5) e (D.1.1.8) si perviene alla seguente relazione (3° formula di Frénet):

$$\frac{d\underline{e}_2}{ds} = \frac{1}{R} \underline{e}_2 \times \underline{e}_1 + \underline{e}_3 \times \frac{1}{\tau} \underline{e}_2 = -\frac{1}{\tau} \underline{e}_1 - \frac{1}{R} \underline{e}_3. \quad (\text{D.1.1.11})$$

In conclusione le tre formule di Frénet sono:

$$\begin{cases} \frac{d\underline{e}_1}{ds} = \frac{1}{\tau} \underline{e}_2 \\ \frac{d\underline{e}_2}{ds} = -\frac{1}{\tau} \underline{e}_1 - \frac{1}{R} \underline{e}_3 \\ \frac{d\underline{e}_3}{ds} = \frac{1}{R} \underline{e}_2. \end{cases} \quad (\text{C.1.1.12})$$

Bibliografia

- [1] Ascione L., Fraternali F. 1986. *Sulla statica delle travi ad asse curvo* – Università di Salerno - Facoltà di Ingegneria – Istituto di Ingegneria Civile.
- [2] O’Neill B. 2006. *Elementary differential geometry, 2st edition* – Elsevier, San Diego.

Indice dei simboli

\underline{B} : forze di volume;

B : solido tridimensionale;

β : volume del solido;

$\partial\beta_u$: superficie del solido in cui si impongono spostamenti noti;

$\partial\beta_f$: superficie del solido in cui agiscono le forze di superficie;

$\underline{\underline{C}}$: matrice costitutiva;

\underline{D} : matrice delle derivate delle funzioni di forma;

$\underline{\underline{\hat{D}}}$: un tensore di velocità di deformazione;

\underline{d} : vettore delle deformazioni generalizzate;

E : modulo elastico longitudinale o di Young;

\underline{E} : tensore di deformazione finita di *Green-Lagrange*;

$\underline{\underline{\dot{E}}}$: tensore di velocità di deformazione finita di *Green-Lagrange*;

\underline{e} : versori degli assi coordinati nel riferimento intrinseco;

$\underline{\underline{\varepsilon}}$: tensore di deformazione infinitesima;

$\underline{\varepsilon}$: vettore delle deformazioni (notazione di Voigt);

ε_0 : componente generalizzata di deformazione estensionale;

\underline{F} : gradiente di deformazione;

\underline{f} : forze di superficie;

Φ : potenziale elastico;

Φ_c : potenziale elastico complementare;

φ : rotazione della sezione trasversale della trave;

φ_x : componente rotazionale di spostamento attorno all'asse x ;

φ_y : componente rotazionale di spostamento attorno all'asse y ;

G : modulo elastico tangenziale;

$\underline{\underline{G}}$: seconda matrice dell'elemento misto – ibrido;

γ : componente generalizzata di deformazione tangenziale;

H_i : i -esima funzione di forma cubica di Hermite;

$\underline{\underline{H}}$: prima matrice dell'elemento misto – ibrido (matrice *Hessiana*);

$\underline{\underline{\hat{H}}}$: gradiente di spostamento;

\underline{K} : matrice di rigidezza globale della struttura;

\underline{K}_e : matrice di rigidezza elastica elementare;

\underline{K}_g : matrice di rigidezza geometrica elementare;

κ : curvatura;

\underline{I} : tensore identità;

L_{ext}, L_e : lavoro dei carichi esterni;

L_i : lavoro interno;

L_{a_i} : i -esima funzione di forma polinomiale di Lagrange;

\underline{N} : matrice delle funzioni di forma;

\underline{n} : vettore normale a una superficie;

ν : coefficiente di contrazione laterale o di Poisson;

Π : energia potenziale totale;

Π_c : energia potenziale complementare;

\underline{q} : vettore degli spostamenti nodali;

\underline{Q} : vettore dei carichi nodali;

R : raggio di curvatura;

\underline{r} : vettore delle reazioni vincolari;

\underline{S} : vettore delle componenti dell'azione interna (N, T, M);

s_i : componente del campo di spostamento in direzione i ;

$\hat{\underline{S}}$: secondo tensore di sforzo di *Piola-Kirchhoff*;

$\underline{\underline{\sigma}}, \underline{T}$: tensore degli sforzi di Cauchy;

$\underline{\sigma}$: vettore delle tensioni (notazione di Voigt);

t_i : trazioni superficiali;

\underline{u} : campi di spostamento;

$\bar{\underline{u}}$: spostamenti imposti;

u_x : componente generalizzata di spostamento in direzione x ;

u_y : componente generalizzata di spostamento in direzione y ;

u_z : componente generalizzata di spostamento in direzione z ;

V : sottospazio vettoriale;

v : elemento del sottospazio vettoriale;

\underline{v} : campi di velocità.

Indice analitico

A

Analisi statica lineare di strutture
rettilinee e piane:

- trave rettilinea sottile, omogenea
82, 85
- trave rettilinea sottile, laminata
88, 91, 92
- trave rettilinea spessa, omogenea
82, 85
- trave rettilinea spessa, laminata
88, 91, 92
- lastra-piastra piana sottile e
omogenea 98, 99
- lastra-piastra piana sottile e
laminata 100, 101
- lastra-piastra piana spessa e
omogenea 99
- lastra-piastra piana spessa e
laminata 100, 101

Analisi agli autovalori di strutture
rettilinee e piane (P_{crit}):

- trave rettilinea sottile, omogenea
122, 124
- trave rettilinea sottile, laminata
126
- trave rettilinea spessa, omogenea
123, 125
- trave rettilinea spessa, laminata
126
- lastra-piastra piana sottile e
omogenea 131, 132, 134
- lastra-piastra piana spessa e
omogenea 135
- lastra-piastra piana spessa e
laminata 136

Arco parabolico, *test* 170
Autovalori 62, 121, 130, 185, 192
Autovettori 62, 121, 130, 192

B

Banach, spazi di 179
Bubble – function 49, 51

C

Carico critico:

- Euleriano 108, 192
- di propagazione frattura 198
- di travi 115, 121, 137, 188
- di lastre-piastre 127, 130, 137, 190

Condition:

- inf-sup* 43, 60, 64,
- rank* 67
- di ellitticità 43, 60, 65

Convergenza 44, 62, 70, 177, 199

Coordinate:

- cartesiane ortogonali 109, 164
- curvilinee 23, 154, 203
- polari 162, 168, 171, 173

Curvatura:

- generalizzata 76, 80, 116, 120,
142, 157, 161, 163
- raggio di 23, 26, 154, 156, 165, 204

D

DCB *test* 145

Deformazione:

- analisi della 108
- parametri di 53, 57, 78, 80, 96,
117, 121, 129, 142, 163, 166

Deformazioni:

- elementi alle 68
- finite 112, 115
- generalizzate 20, 21, 24, 37, 77,
116, 159
- infinitesime 52, 76, 111, 160

Delaminazione, fenomeno della 138,
141, 148, 197

Due nodi, elementi 16, 78, 117, 141

E

Elementi finiti agli spostamenti:

- di trave rettilinea 16, 24, 27, 49,
164
- di trave curva 23, 25, 153, 160,
173

di lastra-piastra 27, 36, 93, 103
 incompatibili 50

Elementi finiti misto – ibridi:
 basati sul principio di Hu-Washizu 52
 basati sul principio di Hellinger-Reissner 55
 basati sul principio di Hu-Washizu modificato 56
 alle tensioni 57

Elementi finiti misto – ibridi a 2 campi:
 di trave rettilinea 76, 80, 117, 120
 di trave curva 160, 163
 di lastra-piastra 93, 129

Energia complementare, principio 7, 11
 Energia potenziale totale, principio 4, 11

Equilibrio:
 elastico lineare 1, 3, 12, 14

F

Forze:
 di volume 2, 5, 8, 14, 28, 50, 53, 56, 77, 96, 112, 128, 162
 di superficie 2, 5, 29, 53, 55, 112

Frenét, formule di 154, 158, 203, 205

G

Gauss, punti di 46, 49, 101
 Gradi di libertà 51, 65, 117, 132, 163
 Gradiente:
 di deformazione 109, 187
 di spostamento 110, 187

Green-Lagrange, tensore di 111, 113, 187, 191

H

Hellinger-Reissner, principio di 10, 11
 Hermite, polinomi di 19, 22, 49
 Hilbert, spazi di 180, 184
 Hu-Washizu, principio di 8, 11

I

Interfaccia:
 modellazione 138, 141

elementi di 138, 140
 molle non lineari 138, 139

J

Jacobiano, determinante 20, 26, 37, 165
 Jacobiano, matrice 37

K

Kirchhoff:
 teorema di 41
 piastra di 33, 74, 191
 tensore di 112, 115, 188
 taglio di 35

L

Lagrange:
 polinomi di 19, 25, 36
 moltiplicatori 8, 11, 77, 161

Laminati:

materiali 56, 73
 travi 77, 138
 lastre-piastre 93, 127

Lastra – piastra, elemento a 4 nodi:
 agli spostamenti 27
 misto – ibrido 93, 129

Lavori virtuali, principio 4, 7, 11, 28, 144, 180

Lax-Milgram, teorema di 41

Locking:

shear 38, 45, 61, 103, 137
membrane 38, 46, 167

M

Matrice:

di rigidezza 4
 di rigidezza elastica 4, 14, 21, 22, 37, 42, 62, 142, 188, 193
 di rigidezza geometrica 119, 122, 128, 137, 190
 di rigidezza dell'interfaccia 143

Modo critico 132, 133, 135, 137, 194

N

Nanson, formula di 114

Nodali:

spostamenti 4, 14, 50, 55, 59, 65,
79, 97, 118, 121, 130, 142, 166
carichi 4, 16, 59, 81, 97, 121, 130

O

Obreimoff, modello di 197, 148
Ottimali, elementi misto – ibridi 62, 65,
80, 96, 129, 142, 163

P

Patch – test 62, 70
Potenze virtuali, principio 113
Principi variazionali:
Energia Potenziale Totale 4, 11
Energia Complementare 7, 11
Hu-Washizu 8, 11
Hellinger-Reissner 10, 11
Relazioni tra principi 11

Q

Quarto di cerchio, *test* 46, 167
Quattro nodi, elementi 27, 97, 129

R

Rayleigh-Ritz-Galerkin 12, 177
Reissner – Mindlin, piastra di 27, 33, 35
Ring completo, *test* 172
Ring incompleto, *test* 173

S

Stabilità:
di un metodo *FEM* 44, 62, 68
dell'equilibrio 107, 138

T

Tensione:
analisi della 112
parametri di 62, 65, 69
Tensioni, elementi alle 57, 65, 67, 69
Tensore:
degli sforzi di Cauchy 112
di Cauchy-Green 187

di deformazione infinitesima

111, 187

di Green-Lagrange 111, 113, 187,
191

di Piola-Kirchhoff 112, 115, 188

Torsione di una curva 154, 204

Trave rettilinea, elemento a 2 nodi:

agli spostamenti 16, 21, 141
misto – ibrido 76, 117

Trave rettilinea, elemento a 3 nodi:

misto – ibrido 80, 120

Trave curva, elemento a 3 nodi:

agli spostamenti 23
misto – ibrido 160, 163

Tre nodi, elementi 23, 80, 120, 163

Trefftz, elemento ibrido di 58

V

Voigt, notazione di 15, 55

Y

Young, modulo di 2, 156

Z

Zero Energy Modes:

definizione 66, 67, 69

soppressione 68