



# Università degli Studi di Ferrara

## DOTTORATO DI RICERCA IN "SCIENZE DELL'INGEGNERIA"

CICLO XXII

COORDINATORE Prof. Stefano Trillo

### Convezione forzata laminare in condotti cilindrici con generazione interna di calore

Settore Scientifico Disciplinare ING-IND 10

**Dottorando**

Dott. Tommaso Pesso

(firma)

**Tutore**

Prof. Stefano Piva

(firma)

Anni 2007/2010

# Indice

<b>Indice</b>	<b>i</b>
<b>Elenco delle figure</b>	<b>v</b>
<b>Elenco delle tabelle</b>	<b>ix</b>
<b>1 Introduzione</b>	<b>1</b>
1.1 Il riscaldamento ohmico degli alimenti: generalità e modellistica	1
1.2 Studi teorici sulla convezione in condotti con generazione interna di calore . . . . .	6
1.3 Finalità e obiettivi del presente lavoro di Tesi . . . . .	8
<b>2 Caso con generazione interna di calore costante</b>	<b>11</b>
2.1 Modello Matematico . . . . .	13
2.2 Metodo Risolutivo . . . . .	15
2.2.1 Caso T con generazione . . . . .	19
2.2.2 Caso adiabatico con generazione . . . . .	19
2.3 Risultati e Discussione . . . . .	20
2.4 Considerazioni conclusive . . . . .	26
<b>3 Caso con generazione interna di calore variabile</b>	<b>29</b>
3.1 Equazioni e strategie di soluzione . . . . .	31

---

3.1.1	Generazione interna di calore costante con condizioni al contorno del terzo tipo . . . . .	40
3.2	Risultati e discussione . . . . .	40
3.2.1	Caso con $S_1^2 > 0$ . . . . .	40
3.2.2	Caso con $S_1^2 < 0$ . . . . .	46
3.3	Considerazioni conclusive . . . . .	57
3.4	Appendice . . . . .	60
<b>4</b>	<b>Caso con conduzione assiale di calore nel fluido</b>	<b>61</b>
4.1	Modello matematico e strategia risolutiva . . . . .	62
4.2	Risultati e discussione . . . . .	71
4.3	Considerazioni conclusive . . . . .	75
<b>5</b>	<b>Analisi di uno scambiatore ohmico a geometria collineare</b>	<b>77</b>
5.1	Introduzione . . . . .	77
5.2	Modello Matematico . . . . .	78
5.2.1	Descrizione del sistema . . . . .	78
5.2.2	Assunzioni di base . . . . .	80
5.2.3	Equazioni di riferimento e strategia di soluzione . . . . .	80
5.2.4	Campo Termico . . . . .	82
5.2.5	Stima del coefficiente di trasferimento esterno di calore	84
5.3	Risultati e discussione . . . . .	84
5.4	Considerazioni conclusive . . . . .	90
5.5	Appendice . . . . .	91
<b>6</b>	<b>Considerazioni conclusive</b>	<b>93</b>
<b>A</b>	<b>Listati Programmi</b>	<b>101</b>
A.1	Plottaggio parametri scambio termico, caso T, Capitolo 1 . . . . .	101

---

A.2	Plottaggio parametri di scambio termico, caso con $R_w > 0$ , Capitolo 1 . . . . .	104
A.3	Plottaggio profili radiali di temperatura adimensionale, $R_w > 0$ , Capitolo 1 . . . . .	107
A.4	Distribuzione del numero di Nusselt locale, $R_w > 0$ , Capitolo 1	109
A.5	Caso adiabatico con generazione interna di calore costante, distribuzione assiale della temperatura di parete adimensionale	111
A.6	Numero di Nusselt completamente sviluppato . . . . .	112
A.7	Calcolo quantità $\chi$ , $\delta$ , $f$ , $\gamma$ . . . . .	120
A.8	calcolo automatico autovalori regione downstream . . . . .	121
A.9	Calcolo automatico autovalori upstream . . . . .	122
A.10	Procedura iterativa per la determinazione delle costanti di separazione A e B . . . . .	124
A.11	calcolo del valore locale della funzione ipergeometrica confluyente	126



# Elenco delle figure

1.1	Configurazione di tipo batch . . . . .	3
1.2	Configurazione di tipo trasversale . . . . .	3
1.3	Configurazione di tipo collineare . . . . .	4
2.1	Rappresentazione schematica del problema . . . . .	13
2.2	Distribuzione della temperatura adimensionale a diverse coordinate assiali; $R_W = 0.25$ . . . . .	22
2.3	Distribuzione della temperatura di parete e di mescolamento adimensionale del flusso di calore adimensionale scambiato alla parete . . . . .	24
2.4	Distribuzione del numero di Nusselt locale; $R_W = 0.25$ . . . . .	25
2.5	Confronto tra le distribuzioni della temperatura adimensionale di mescolamento del caso adiabatico e di casi T3 con $R_W = 25, 2.5 \cdot 10^5; S_0 = 10$ . . . . .	27
3.1	Geometria e condizioni al contorno . . . . .	31
3.2	Distribuzione adimensionale della temperatura di mescolamento e del flusso di calore alla parete (- - : $T_b$ ; —: $q_W$ ), $S_0 = 10$ ; (a): $R_W = 0$ (caso T); (b): $R_W = 0.25$ ; (c): $R_W = 25$ . . . . .	44

3.3	Distribuzione della temperatura adimensionale nella regione di completo sviluppo, $S_0 = 10$ ; (a): $R_W = 0$ (caso T); (b): $R_W = 0.25$ ; (c): $R_W = 25$ . . . . .	45
3.4	Numero di Nusselt locale, regione di completo sviluppo (linea continua: analisi presente; asterisco [21]; quadrati: [22]); . . .	46
3.5	Primi autovalori come funzione di $S_1^2$ . . . . .	55
3.6	Influenza di $S_1^2$ sulla distribuzione adimensionale di temperatura per la regione di completo sviluppo, $S_0 = -10$ : (a): $R_W = 0$ ; (b): $R_W = 0.25$ ; (c): $R_W = 25$ . . . . .	56
3.7	Influenza di $S_1^2$ sulle distribuzioni adimensionali di $T_b$ e $q_w$ , $S_0 = -10$ : (a): $R_W = 0$ ; (b): $R_W = 0.25$ ; (c): $R_W = 25$ ; (“-”: $T_b$ ; “—”: $q_w''$ ) . . . . .	58
3.8	Variazione del numero di Nusselt completamente sviluppato con $S_1^2$ . . . . .	59
4.1	Rappresentazione schematica del caso di analisi . . . . .	63
4.2	Andamento di $\lambda_1$ con $Pe$ ( $S_1^2 = -0.1$ ) . . . . .	73
4.3	Distribuzione adimensionale della temperatura di mescolamento e del flusso di calore alla parete al variare del numero di Péclet (—: $T_b$ ; -: $q_w$ ); $R_W = 0.25$ ; $S_0 = -10$ ; $S_1^2 = -0.1$ , $Pe = 0.01, 0.1, 10, 100, \infty$ ). . . . .	74
5.1	Geometria di interesse . . . . .	79
5.2	Distribuzione tipica del termine di generazione di calore come funzione della temperatura di mescolamento . . . . .	84
5.3	Distribuzione tipica della temperatura di mescolamento . . . . .	85

5.4	Profili radiali di temperatura in corrispondenza di diverse sezioni del condotto per i casi di studio di Tabella 5.3:(a): caso n. 1; (b): caso n. 2; (c): caso n. 3; (d): caso n. 4 . . . . .	87
5.5	Profili radiali di temperatura in corrispondenza di diverse sezioni del condotto per i casi di studio di Tabella 5.5:(a): caso n. 1; (b): caso n. 2; (c): caso n. 3 . . . . .	89





# Elenco delle tabelle

2.1	I primi dieci autovalori in funzione di $R_W$ . . . . .	21
3.1	Valori del parametro $a_1^2$ . . . . .	38
3.2	I primi dieci autovalori, $R_W = 0$ (caso T) . . . . .	41
3.3	I primi dieci autovalori, $R_w = 0.25$ . . . . .	42
3.4	I primi dieci autovalori, $R_W = 25$ . . . . .	42
3.5	Confronto del presente calcolo degli autovalori con i risultati da letteratura per $S_1^2 = 0$ (generazione di calore uniforme) . . . . .	48
3.6	Autovalori per $R_w = 0$ come funzione di $S_1^2$ (prima parte) . . . . .	49
3.7	Autovalori per $R_w = 0$ come funzione di $S_1^2$ (seconda parte) . . . . .	50
3.8	Autovalori per $R_w = 0.25$ come funzione di $S_1^2$ (prima parte) . . . . .	51
3.9	Autovalori per $R_w = 0.25$ come funzione di $S_1^2$ (seconda parte) . . . . .	52
3.10	Autovalori per $R_w = 25$ come funzione di $S_1^2$ (prima parte) . . . . .	53
3.11	Autovalori per $R_w = 25$ come funzione di $S_1^2$ (seconda parte) . . . . .	54
4.1	Radici upstream $\beta_i$ . . . . .	71
4.2	Radici downstream $\lambda_i$ ( $R_W = 0.25$ , $S_1^2 = -0.1$ ) . . . . .	72
5.1	Dati principali dell'attrezzatura . . . . .	79
5.2	Influenza dell'isolamento termico: casi d'analisi . . . . .	86
5.3	Risultati principali: influenza dell'isolamento termico . . . . .	86

5.4	Influenza della portata in massa: casi d'analisi (nessun isolamento termico) . . . . .	88
5.5	Risultati principali: influenza della portata in massa . . . . .	90

# Capitolo 1

## Introduzione

### 1.1 Il riscaldamento ohmico degli alimenti: generalità e modellistica

Il riscaldamento è la fase fondamentale in un processo di trattamento di un cibo per la sua conservazione, cottura o disattivazione enzimatica.

Nei processi di trattamento tradizionali, il cibo viene riscaldato per conduzione, convezione e irraggiamento attraverso la sua superficie esterna, se solido, o attraverso le pareti del condotto, se liquido. In questi casi, l'intensità di riscaldamento e, dunque, la velocità del processo, è limitata dal fatto che è necessario evitare l'eccessiva cottura di quelle zone del cibo che sono a contatto con l'ambiente riscaldante. E' necessario dunque limitare i gradienti di temperatura all'interno dell'alimento il che comporta processi lenti e poco efficienti.

Con l'obiettivo di superare questi limiti, negli ultimi trent'anni sono pertanto state sviluppate differenti tecnologie che sfruttano il riscaldamento di tipo volumetrico. Ciò sembrerebbe limitare i gradienti di temperatura

nell'alimento e quindi, consente di migliorare la qualità del prodotto finito [1].

Le principali tecnologie di tipo volumetrico sono quella a microonde e quella ohmica. In questi processi, il calore è generato internamente al cibo e, pertanto, viene svincolato dal riscaldamento attraverso le pareti di confine, che avviene solo se è possibile far nascere un gradiente di temperatura all'interno dell'alimento, il che può portare, come appena visto, a prodotti di qualità insufficiente.

La tecnologia basata sul riscaldamento ohmico degli alimenti è considerata al giorno d'oggi come quella con più vantaggi per i processi di tipo continuo per il riscaldamento sia di cibi liquidi, sia per i miscugli solido/liquido [1]. E' inoltre di interesse per il trattamento di alcuni cibi solidi, come il pesce e la carne.

Il riscaldamento ohmico si basa essenzialmente sulla generazione interna di calore per effetto ohmico in un materiale, l'alimento, sottoposto ad un campo elettrico. In letteratura sono reperibili diversi studi sull'argomento e sulle soluzioni tecniche. Una approfondita rassegna bibliografica può essere individuata in [1].

In generale, le tipologie di riscaldatori ohmici comunemente impiegate possono essere suddivise in tre gruppi fondamentali:

1. Configurazioni a batch (vedi Fig. 1.1), in cui il prodotto è viene isolato in un recipiente, e gli elettrodi sono di tipo coassiali (geometrie cilindriche), piani o paralleli;
2. Configurazioni trasversali (vedi Fig. 1.2), in cui il prodotto scorre parallelamente agli elettrodi e perpendicolarmente al campo elettrico. In tal caso gli elettrodi sono generalmente piani, per condotti a sezione rettangolare, o coassiali, per condotti a sezione anulare;

## 1.1 Il riscaldamento ohmico degli alimenti: generalità e modellistica 3

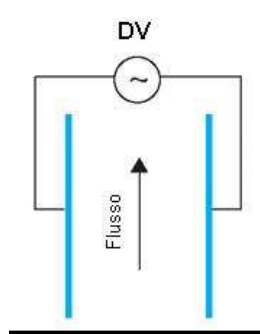


Figura 1.1: Configurazione di tipo batch

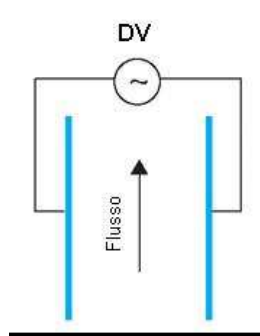


Figura 1.2: Configurazione di tipo trasversale

3. Configurazione collineare (vedi Fig.1.3), in cui il prodotto scorre da un elettrodo all'altro, parallelamente al campo elettrico. In tal caso il condotto più utilizzato per la sua semplicità ed economia è quello cilindrico, e gli elettrodi sono spazati e disposti lungo il condotto.

Nel caso di geometrie di tipo batch, generalmente un primo approccio per lo studio di questi sistemi è quello di considerare il prodotto come un mezzo statico e quindi risolvere le equazioni della conduzione del calore in presenza di effetti generativi (vedi [1]). E' necessario tuttavia chiarire quando il ruolo della convezione naturale, sempre presente, possa giocare un ruolo sensibile sui risultati, in funzione della percentuale solido/liquido del prodotto.

In sintesi, la tecnologia di tipo batch è piuttosto semplice, e può essere

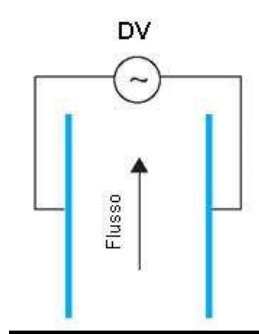


Figura 1.3: Configurazione di tipo collineare

utilizzata in applicazioni artigianali, in applicazioni industriali in ambito di ricerca e sviluppo per controllare come i parametri di processo possano influenzare la qualità del cibo e i suoi macro/micro nutrienti (vedi [1]), o infine per il trattamento di cibi solidi.

Certamente più interessanti dal punto di vista industriale sono le configurazioni di riscaldatore ohmico di tipo trasversale o collineare. Tali soluzioni tecniche costituiscono processi di tipo continuo, nei quali il cibo, tipicamente liquido o introdotto come sospensione di particelle solide in un mezzo liquido, viene trattato in condotti di diversa foggia.

Stirling [2], citato in [1], ha presentato uno studio per un riscaldatore ohmico a configurazione trasversale. Gli elettrodi sono piani e spazati lungo il condotto di plastica. E' stato dunque indagato l'effetto dell'intensità di corrente sul trattamento termico dell'alimento, in particolar modo nei confronti del fenomeno del overheating, sempre da evitare nelle applicazioni. Berthou et al. [3], citato in [1], hanno invece approfondito l'argomento per condotti a sezione rettangolare per diversi aspect ratio.

Nel caso di riscaldatori ohmici a geometria collineare, il campo elettrico e il flusso di corrente elettrica sono paralleli al flusso del prodotto. Generalmente gli elettrodi sono distanziati ampiamente e assemblati in condotti

## **1.1 Il riscaldamento ohmico degli alimenti: generalità e modellistica** **5**

generalmente in plastica, in teflon o in pirex per ottenere isolamento elettrico tra gli elettrodi. Comunemente, la superficie dell'elettrodo in contatto con il prodotto è limitata e il voltaggio è molto elevato. La frequenza della corrente elettrica è variabile tra i 50Hz e i 300 Hz, per evitare effetti ionizzanti delle molecole dell'acqua.

Tale processo è stato modellato in diversi studi e configurazioni in letteratura. Una approfondita rassegna bibliografica è individuabile in [4]; [1]. Quarini [5] propone un modello matematico per uno scambiatore ohmico a geometria collineare in un condotto cilindrico verticale. Similmente a quanto proposto anche da de Alwis e Fryer [6], in [5] viene assunto che il termine di generazione interna di calore sia costante nello scambiatore. Come osservato tuttavia dallo Autore [], tale assunzione è valida se la conduttività elettrica dell'alimento non varia in maniera significativa entro lo scambiatore. Viene dunque osservato che, sebbene la generazione interna di calore sia costante, le distribuzioni di temperatura in ciascuna sezione assiale del condotto variano significativamente tra la mezzeria del condotto stesso e le pareti laterale. Ciò può pertanto portare al sovra-trattamento termico di alcune porzioni di fluido, aspetto che va sempre evitato nelle applicazioni. Viene inoltre osservato che l'effetto della convezione naturale può essere significativo e può portare a flussi diretti inversamente al flusso principale. Michiyoshi et al. [7] giungono ad osservazioni simili per il medesimo caso di analisi, ma condotto per via sperimentale, in particolar modo per quanto riguarda il regime di moto laminare. In [7] viene inoltre osservato che l'effetto della convezione naturale è meno significativo per il regime di moto turbolento.

Il problema del sovra-trattamento termico, in quanto fortemente correlato alla qualità del prodotto finito, è analizzato anche da Stancl et al. [8] e da Zitny et al. [9]. In [8] e [9] viene osservato che tale aspetto negativo dei gene-



ratori ohmici è particolarmente correlato allo deposito sulla superficie degli elettrodi in contatto con il prodotto per via della bassa conduttività elettrica dello strato di deposito stesso. Nei medesimi studi [8] e [9] viene inoltre affrontato il problema del riscaldamento incontrollato. Tale fenomeno, assolutamente da evitare nelle applicazioni poiché porta a guasti dell'impianto, è legato ai parametri operativi, quali per primo l'intensità di corrente. Nel caso di prodotti con conduttività elettrica variabile con la temperatura, tale effetto è possibile quando la generazione interna di calore è crescente con la temperatura locale dell'alimento. In tal caso, come osservato da [8] e [9], sono possibili situazioni in cui viene generato una quantità di calore in eccesso che il sistema non riesce a smaltire con l'ambiente. Il processo può pertanto divenire incontrollato. Nello studio [8] viene proposto pertanto un criterio per identificare tale situazione.

Ulteriori analisi in letteratura sono rivolte a scambiatori ohmici che elaborino miscugli solido-liquido [10], [4]. Come osservato in questi studi, la presenza delle particelle solide è significativa o per una elevata concentrazione rispetto al liquido, o quando la loro dimensione caratteristica è dello stesso ordine di grandezza del tubo.

## 1.2 Studi teorici sulla convezione in condotti con generazione interna di calore

Lo studio della convezione in condotti cilindrici con generazione interna di calore costituisce la base per una analisi accurata di uno scambiatore ohmico a geometria trasversale o collineare e per una adeguata comprensione delle sue caratteristiche fondamentali di scambio termico. E' inoltre di interesse in diversi settori della tecnologia, come la tecnologia nucleare e quella chimica.

Eccellenti trattazioni di lavori teorici e sperimentali su convezione forzata in condotti sono riportati da Shah and London [11], Shah e Batti [12] e Ebdian e Dong [13]. Come emerge da questi lavori, tuttavia, non sono stati intrapresi molti studi finalizzati all'esame dell'influenza di una sorgente di calore sulla convezione forzata laminare nei condotti.

Topper [14] propone una soluzione analitica per la regione di ingresso in condotti circolari con temperatura di parete uniforme e generazione di calore interna costante.

Sparrow and Siegel [15] hanno esteso l'analisi di Topper [14] al caso con generazione interna di calore arbitraria e flusso di calore da parete. Inoltre, il caso particolare di parete adiabatica e generazione interna di calore uniforme è stata analizzata sperimentalmente da Inman [17], mostrando un ottimo riscontro con i risultati di [15].

Tao [18] calcola il numero di Nusselt laminare completamente sviluppato per condotti di diversa foggia con condizione al contorno di flusso uniforme di calore e generazione costante interna di calore mediante un approccio analitico basato sulle proprietà delle funzioni analitiche complesse. Tyagi[19] ha esteso l'analisi di Tao[18] includendo la dissipazione viscosa.

La regione di ingresso termico in condotti circolari con condizioni al contorno di terzo tipo e generazione interna di calore è stata analizzata da Hsu [20]. Gli autovalori e le autofunzioni sono calcolate in [20] numericamente mediante la tecnica di Runge-Kutta.

Un problema simile, ma per un fluido non Newtoniano in un condotto circolare con temperatura di parete uniforme e generazione interna di calore variabile linearmente con la temperatura, è stata analizzata da Foraboschi e Di Federico [21].

Mori et al [22] hanno analizzato il caso coniugato in un condotto circo-

lare con flusso laminare con generazione interna di calore dipendente dalla temperatura e temperatura costante imposta alla superficie della parete conduttiva.

### 1.3 Finalità e obiettivi del presente lavoro di Tesi

Il presente lavoro di Tesi ha origine nello studio degli apparati industriali che sfruttano il riscaldamento ohmico per la sterilizzazione, la pastorizzazione o la cottura dei cibi liquidi.

Nel presente lavoro di tesi è stato considerato come caso di analisi quello di generatore ohmico in un condotto cilindrico, in regime di moto laminare, con elettrodi posti alle estremità del condotto stesso. Il cibo considerato è completamente liquido. Dunque, il presente studio è valido ad esempio per l'analisi della pastorizzazione del latte o per la sterilizzazione di purea di frutta.

Il presente lavoro può essere suddiviso in due fasi distinte. In una prima fase vengono indagati gli aspetti fisico/matematici alla base della tecnologia. Una preliminare fase di ricerca bibliografica ha dunque individuato nei lavori sviluppati essenzialmente in ambito nucleare nel periodo 1950/1960 come casi di studio di riferimento sulla base dei quali poter sviluppare un modello matematico appropriato per il calcolo e l'analisi di un riscaldatore ohmico.

Per la tecnologia di interesse, sono stati successivamente elaborati appropriati modelli matematici di complessità crescente. Tali casi di studio costituiscono una estensione dei casi già studiati dalla letteratura a condizioni al contorno, geometrie e parametri di generazioni appropriati per l'analisi della tecnologia oggetto del presente lavoro. Le soluzioni matematiche proposte

inoltre, diversamente a quanto approfondito in letteratura, sono completamente analitiche. I principali vantaggi sono dunque una elevata precisione dei risultati e una grande velocità di calcolo, nel caso in cui i modelli matematici venissero implementati in moderni codici di calcolo ingegneristico come Matlab.

Il primo caso di studio (Capitolo 1) ha come oggetto quello di convezione laminare di un fluido newtoniano in un condotto cilindrico con condizioni al contorno del terzo tipo e generazione interna di calore costante nel fluido.

Nel secondo capitolo, l'analisi viene estesa al caso di generazione interna di calore variabile linearmente con la temperatura del fluido. Ciò costituisce l'introduzione di un ulteriore fattore di precisione di calcolo, maggiormente appropriato per le applicazioni, che discende dal legame tra la conduttività elettrica del fluido e la temperatura.

Nel terzo capitolo, viene infine analizzato il caso con conduzione assiale di calore nel fluido, caso di interesse per gli scambiatori ohmici che elaborino elevate portate di fluido, ma a bassa velocità.

Nel quarto capitolo viene infine proposta una analisi di uno scambiatore di calore ohmico in regime di moto laminare, che elabora una portata di purea di frutta in una geometria cilindrica. A tal fine la soluzione matematica proposta nel Capitolo 2 è stata integrata in ambiente Matlab, alla soluzione del campo elettrico all'interno dello scambiatore, per mezzo di una procedura di calcolo di tipo iterativo.



## Capitolo 2

# Convezione Laminare in condotti cilindrici con condizioni al contorno del terzo tipo e generazione interna di calore costante

Lo studio della convezione forzata in condotti con generazione interna di calore è di interesse pratico in diversi settori della tecnologia quali, oltre al riscaldamento ohmico, il settore nucleare per quanto concerne i reattori a sali fusi e varie tipologie di impianti chimici che coinvolgono reazioni di processo.

Per una dettagliata rassegna bibliografica dei lavori teorici sull'argomento, si può fare riferimento al Paragrafo 1.2.

In questo Capitolo viene analizzata la convezione forzata laminare in condotti cilindrici con generazione interna di calore e condizioni al contorno del terzo tipo. Le proprietà del fluido, così come la generazione interna di calore,

sono considerate costanti.

Il medesimo caso è stato in precedenza analizzato da Hsu [20]. In [20], gli autovalori e le autofunzioni sono calcolate numericamente mediante una tecnica alla Runge-Kutta. Il calcolo risulta pertanto affetto da alcune imprecisioni, in particolar modo per quanto riguarda la zona di completo sviluppo termico.

Negli ultimi trenta anni tuttavia sono stati sviluppati in letteratura metodi più efficienti per risolvere i problemi di Sturm-Liouville associati alla convezione forzata in condotti [34]. Tali metodi diventano estremamente interessanti se implementati in moderni software di calcolo scientifico come Mathematica [citare una release di Mathematica] o Matlab [citare una release di Matlab].

Nel presente Capitolo, ad una ricerca numerica degli autovalori e autofunzioni come in [20], si preferisce dunque proporre una soluzione analitica esatta in termini di funzioni di Poiseuille [34]. Ciò consente, per il caso di esame, di esprimere le autofunzioni in maniera analitica esatta. Indubbi sono dunque i vantaggi dal punto di vista della precisione di calcolo rispetto ad una soluzione numerica, a parità di tempi richiesti per l'elaborazione dei dati.

Vengono rappresentati e discussi i risultati dei parametri principali di scambio termico nella regione di ingresso termico e di completo sviluppo. Infine, vengono inclusi e discussi nella trattazione come sottocasi della condizione al contorno del terzo tipo, i casi con temperatura di parete uniforme (condizione al contorno di tipo T) e quello di parete adiabatica.

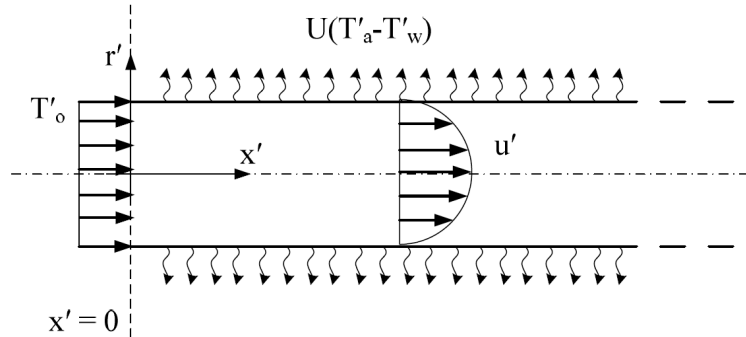


Figura 2.1: Rappresentazione schematica del problema

## 2.1 Modello Matematico

Il problema in esame, rappresentato in Figura 2.1, è costituito da un condotto cilindrico di lunghezza semi-infinita ove un fluido Newtoniano a proprietà costanti circola in regime laminare stazionario. All'ingresso, il profilo di velocità è quello sviluppato, mentre quello di temperatura è uniforme, con valore pari a  $T'_0$ . Nel fluido la dissipazione viscosa e la conduzione assiale di calore sono assunte essere trascurabili. La generazione di calore è uniforme. Infine, le condizioni al contorno sono quelle di scambio termico con un ambiente a temperatura uniforme  $T'_a$ , con coefficiente di scambio termico  $U$  uniforme (condizione al contorno di tipo T3).

Il problema risulta essere descritto matematicamente come segue:

Conservazione dell'energia:

$$2W\rho c_p \left(1 - \left(\frac{r'}{D/2}\right)^2\right) \frac{\partial T'}{\partial x'} = k \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \frac{\partial T'}{\partial r'}\right) + q'''_{gen} \quad (2.1)$$

Condizioni al contorno:



$$T'(0, r') = T'_0 \quad \text{per } x' = 0 \quad (2.2)$$

$$\left. \frac{\partial T'}{\partial r'} \right|_{r'=0} = 0 \quad \text{per } 0 < x' < +\infty \quad (2.3)$$

$$-\left. \frac{\partial T'}{\partial r'} \right|_{r'=D/2} = U(T'_w - T'_a) \quad \text{per } 0 < x' < +\infty \quad (2.4)$$

Il problema è reso adimensionale con le seguenti regole:

$$x^* = X'/(RePrD/2)$$

$$r = r'/(D/2)$$

$$T = (T' - T'_a)/(T'_a - T'_0)$$

L'Equazione (2.1) e le sue condizioni al contorno (2.2),(2.3),(2.4) divengono:

$$(1 - r^2) \frac{\partial T'}{\partial x^*} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T'}{\partial r} \right) + S_0 \quad (2.5)$$

$$T(0, r) = -1 \quad \text{per } x^* = 0 \quad (2.6)$$

$$\left. \frac{\partial T'}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad \text{per } 0 < x^* < +\infty \quad (2.7)$$

$$\left. \frac{\partial T'}{\partial r} \right|_{r=1} + \frac{1}{2R_W} T|_{r=1} = 0 \quad \text{per } 0 < x^* < +\infty \quad (2.8)$$

I parametri adimensionali del problema individuabili nelle Eq. (2.5), (2.6), (2.7), (2.8), sono:

$$S_0 = \frac{q'''_{gen} D^2}{4k(T'_a - T'_0)}$$

$$R_W = k/UD$$

ove  $S_0$  e  $R_W$  rappresentano rispettivamente la generazione interna di calore adimensionale e la resistenza termica adimensionale dell'ambiente [11].

## 2.2 Metodo Risolutivo

La soluzione delle Eq. (2.5), (2.6), (2.7), (2.8), può essere espressa nella seguente forma:

$$T(x^*, r) = R_W S_0 + \frac{S_0}{4} (1 - r^2) + \phi(x^*, r) \quad (2.9)$$

La funzione  $\phi(x^*, r)$  sarà soluzione della seguente equazione differenziale:

$$(1 - r^2) \frac{\partial \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \quad (2.10)$$

con le condizioni al contorno:

$$\phi(0, r) = -1 - R_W S_0 - \frac{S_0}{4} (1 - r^2) \quad \text{per } x^* = 0 \quad (2.11)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad \text{per } 0 < x^* < +\infty \quad (2.12)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r=1} + \frac{1}{2R_W} \phi|_{r=1} = 0 \quad \text{per } 0 < x^* < +\infty \quad (2.13)$$

Con il metodo di separazione di variabili,  $\phi(x^*, r)$  può essere espressa come:

$$\phi(x^*, r) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i g_i(x^*) f_i(r) \quad (2.14)$$

ove, le funzioni  $g_i(x^*)$  e  $f_i(r)$  sono soluzioni di:

$$\frac{dg_i}{dx^*} = -\lambda_i g_i \quad \text{per } 0 < x^* < +\infty \quad (2.15)$$

$$\frac{d^2 f_i}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df_i}{dr} + S_0 f_i = -\lambda_i f_i (1 - r^2) \quad \text{per } 0 < r < 1 \quad (2.16)$$

con condizioni al contorno:

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i g_i(0) f_i(r) = \phi(0, r) \quad (2.17)$$

$$\left. \frac{df_i}{dr} \right|_{r=0} = 0 \quad (2.18)$$

$$\left. \frac{df_i}{dr} \right|_{r=1} + \frac{1}{2R_W} f_i|_{r=1} = 0 \quad (2.19)$$

L'Eq. (2.15), ammette un integrale generale di tipo esponenziale:

$$g_i(x^*) = e^{-\lambda_i x^*} \quad \text{per } 0 < x^* < +\infty \quad (2.20)$$

Sino a questo punto il procedimento è generale. Hsu [20] propone una ricerca numerica degli autovalori  $\lambda_i$  mediante il metodo di Runge-Kutta. Nel presente lavoro si preferisce invece risolvere per via analitica l'Eq.(2.16). La generica soluzione dell'Eq.(2.16) è difatti data da quella funzione di Poiseuille limitata lungo l'asse del condotto,  $pe(r, \mu_i)$ , in modo che la condizione al contorno di assial-simmetria, Eq.(2.18), sia sempre soddisfatta [23]:

$$f_i(r) = pe(r, \mu_i) = e^{[-\mu_i r^2/2]} {}_1F_1 [\alpha_i, 1, \mu_i r^2] \quad (2.21)$$

ove:

$$\begin{aligned} \mu_i &= \lambda_i^{1/2} \\ \alpha_i &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\mu_i}{2} \right) \end{aligned}$$

I valori della costante di separazione  $\lambda_i$  sono le radici della equazione trascendente data dall' Eq.(2.19). Affinché la soluzione  $\phi$  abbia significato fisico, essa deve essere una funzione limitata e, necessariamente, le radici  $\lambda_i$  devono essere reali e positive. Si può facilmente dimostrare che le autofunzioni  $f_i(r)$ , con le condizioni al contorno del terzo tipo, Eq.(2.19), garantiscono:

$$\int_{r=0}^{r=1} (1-r^2) f_i(r) f_j(r) r dr \begin{cases} = 0 & \text{se } i \neq j \\ \neq 0 & \text{se } i = j \end{cases} \quad (2.22)$$

Dall'Eq.(2.17), grazie alla proprietà data dall'Eq.(2.22), segue che:

$$A_i = \frac{\int_0^1 \phi(0, r) f_i(r) (1-r^2) r dr}{\int_0^1 f_i^2(r) (1-r^2) r dr} \quad (2.23)$$

La soluzione dell'Eq.(2.5) diviene allora:

$$T(x^*, r) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i e^{-\lambda_i x^*} f_i(r) + R_W S_0 + \frac{S_0}{4} (1-r^2) \quad (2.24)$$

La temperatura adimensionale di mescolamento è data da:

$$T_b(x^*) = 4 \int_0^1 (1-r^2) T r dr \quad (2.25)$$

Al fine di calcolare l'integrale dell'Eq.(2.25), è necessario osservare che l'integrale in  $0 \leq r \leq 1$  di ciascuna autofunzione  $f_i(r)$ , in virtù del problema di Sturm-Liouville, Eq.(2.16), e della condizione al contorno di assial-simmetria, Eq.(2.18), è dato da:

$$\int_0^1 (1-r^2) f_i(r) r dr = -\frac{1}{\lambda_i} \left( r \frac{df_i}{dr} \right) \Big|_{r=1} \quad (2.26)$$

Imponendo le condizioni al contorno, Eq.(2.18) e (2.19), l'Eq.(2.26) può anche essere espressa come:

$$\int_0^1 (1-r^2) f_i(r) r dr = \frac{1}{2\lambda_i R_W} f_i(r=1) \quad (2.27)$$

La temperatura adimensionale di mescolamento, Eq.(2.25), tenendo in considerazione le Eq.(2.24),(2.26),(2.27) può pertanto essere espressa come:

$$T_b(x^*) = -4 \sum_{i=1}^{\infty} A_i e^{-\lambda_i x^*} \frac{1}{\lambda_i} \left( r \frac{df_i}{dr} \right) \Big|_{r=1} + R_W S_0 + \frac{1}{6} S_0 \quad (2.28)$$

oppure:

$$T_b(x^*) = -4 \sum_{i=1}^{\infty} A_i e^{-\lambda_i x^*} \frac{1}{\lambda_i} \frac{1}{2\lambda_i R_W} f_i(r=1) + R_W S_0 + \frac{1}{6} S_0 \quad (2.29)$$

La potenza termica scambiata alla parete per unità di superficie, considerata positiva quando entrante nel sistema, è data da:

$$q_W'' = k \left. \frac{\partial T'}{\partial r'} \right|_{r=D/2} \quad (2.30)$$

Adimensionalizzando l'Eq.(2.30) si ottiene che:

$$q_W'' = k \frac{(T'_a - T'_0)}{D/2} \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=1} \quad (2.31)$$

Pertanto, dall'Eq.(2.30) e (2.31) segue la definizione di flusso di calore adimensionale scambiato alla parete adottata in questo studio:

$$q_W(x^*) = \frac{q_W''}{k \frac{(T'_a - T'_0)}{D/2}} = \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=1} \quad (2.32)$$

Il numero di Nusselt locale è dato da:

$$Nu_x = 2 \frac{\left. \frac{\partial T(x^*, r)}{\partial r} \right|_{r=1}}{T_W(x^*) - T_b(x^*)} \quad (2.33)$$

Tenendo in considerazione le Eq.(2.8),(2.24),(2.29), il numero di Nusselt locale, Eq.(2.33), può pertanto essere espresso come:

$$Nu_x = \frac{2 \sum_{i=1}^{\infty} A_i e^{-\lambda_i x^*} \left. \frac{df_i}{dr} \right|_{r=1} - S_0}{\sum_{i=1}^{\infty} A_i e^{-\lambda_i x^*} \left( f_i(r=1) + \frac{4}{\lambda_i} \left. \frac{df_i}{dr} \right|_{r=1} \right) - \frac{1}{6} S_0} \quad (2.34)$$

Infine, considerando il limite dell'Eq.(2.34) per  $x^* \rightarrow +\infty$  si ottiene il numero di Nusselt asintotico, che assume la seguente espressione:

$$Nu_{x,fd} = 6 \quad (2.35)$$

### 2.2.1 Caso T con generazione

La soluzione del caso T può essere ottenuta direttamente dalla soluzione proposta per il caso T3 quando  $R_W = 0$ . Dalla Eq.(2.24), ponendo  $R_W = 0$ , si ottiene:

$$T(x^*, r) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i e^{-\lambda_i x^*} f_i(r) + \frac{S_0}{4} (1 - r^2) \quad (2.36)$$

ove gli autovalori sono dati dalla seguente equazione trascendente, ottenuta dall'Eq.(2.19) una volta posto  $R_W = 0$ :

$$f_i|_{r=1} = 0 \quad (2.37)$$

L'Eq.(2.22) è ancora soddisfatta; le costanti  $A_i$  sono pertanto date dall'Eq.(23), ove la funzione  $\phi(0, r)$  si ottiene dall'Eq.(2.11) una volta posto  $R_W = 0$ .

La temperatura adimensionale di mescolamento è data dall'Eq.(2.28) una volta posto  $R_W = 0$ . Si osservi che l'Eq.(2.29) è utilizzabile solo per il caso T3, ma non per quello T.

Inoltre, sia il flusso di calore adimensionale scambiato alla parete, Eq.(2.32), sia il numero di Nusselt locale di Eq.(2.34), sia quello asintotico, Eq.(2.35), sono immediatamente trasferibili al caso T. Infine, il valore del numero di Nusselt asintotico, Eq. (2.35), corrisponde a quello calcolato da Mori et al. [22].

### 2.2.2 Caso adiabatico con generazione

Si ottiene il caso adiabatico quando  $R_W \rightarrow \infty$ . Una dettagliata trattazione del caso adiabatico con generazione interna di calore è proposta da Sparrow e Siegel [15]; nel presente lavoro si è fatto riferimento a tale trattazione

sostituendo la soluzione numerica di Sparrow e Siegel [15] con la soluzione analitica qui proposta in termini di funzioni di Poiseuille. La distribuzione di temperatura adimensionale nella regione di ingresso termico per il caso adiabatico con generazione è allora data da:

$$T(x^*, r) = 2S_0x^* - 1 + \frac{S_0}{4} \left( r^2 - \frac{1}{2}r^4 - \frac{1}{4} \right) \sum_{i=1}^{\infty} A_i e^{-\lambda_i x^*} f_i(r) \quad (2.38)$$

ove le autofunzioni  $f_i(r)$  sono soluzione del problema di Sturm-Liouville di Eq.(2.16) e gli autovalori sono radici della seguente equazione trascendente, che discende dall'Eq.(2.19) una volta posto  $R_W \rightarrow \infty$ :

$$\left. \frac{df_i}{dr} \right|_{r=1} = 0 \quad (2.39)$$

L'Eq.(2.22) è ancora soddisfatta. Le costanti  $A_i$  sono pertanto date da:

$$A_i = \frac{\int_0^1 \frac{S}{4} \left( r^2 - \frac{1}{2}r^4 - \frac{1}{4} \right) f_i(r) (1 - r^2) r dr}{\int_0^1 f_i^2(r) (1 - r^2) r dr} \quad (2.40)$$

## 2.3 Risultati e Discussione

Mediante il metodo della secante sono stati calcolati i primi venti valori della costante di separazione  $\lambda_i$  per  $R_W = 0, 0.25, 2.5 \cdot 10^5, \infty$ , in virtù dei quali il calcolo della temperatura adimensionale, Eq.(2.24), risulta accurato per  $x^* \geq 5 \cdot 10^{-3}$ . In Tabella 2.1 sono riportati i primi dieci autovalori.

Gli autovalori calcolati per  $R_W = 0, R_W = 0.25$  e  $R_W \rightarrow \infty$  sono in eccellente accordo rispettivamente con quelli proposti da Barr e Wiginton [25], Hsu [20] e Sparrow e Siegel [15].

Dall'analisi della Tabella 2.1, si osserva che l'andamento della funzione  $\lambda_i = \lambda_i(R_W)$  è decrescente con  $R_W$  ed è convergente a  $\lambda_i = \lambda_i(R_W = \infty)$ .

Tabella 2.1: I primi dieci autovalori in funzione di  $R_W$ 

N	$R_W = 0$	$R_W = 0.25$	$R_W = 25$	$R_W = 25 \cdot 10^5$	$R_W = \infty$
1	7.3135869	4.0000000	0.0792722	$7.9999 \cdot 10^{-6}$	0
2	44.609461	32.992650	25.781377	25.679622	25.679612
3	113.92103	93.027181	83.977669	83.861767	83.861755
4	215.24054	184.69703	174.29374	174.16675	174.16674
5	348.56411	308.17107	296.67259	296.53631	296.53630
6	513.89006	463.52136	451.09157	450.94721	450.94719
7	711.21753	650.78560	637.53894	637.38735	637.38734
8	940.54606	1420.15.00	856.00765	855.84951	855.84950
9	1201.8753	1121.1373	1106.4931	1106.3290	1106.3290
10	1495.2052	1404.2489	1388.9921	1388.8225	1388.8224

In Figura 2.2 vengono rappresentati i profili di temperatura adimensionale per diversi valori della coordinata assiale. Nella regione di ingresso, la distribuzione di temperatura adimensionale risulta essere circa uniforme quando  $S_0 < 0$ , mentre si osservano apprezzabili disomogeneità quando  $S_0 > 0$ . Nella regione di completo sviluppo, dall'Eq.(2.24) segue che nel caso T3 la differenza tra il valore della temperatura adimensionale in corrispondenza dell'asse del condotto e della parete è data da  $S_0/4$ .

In Figura 2.3 viene rappresentata l'influenza del termine di generazione di calore adimensionale  $S_0$  sulle distribuzioni della temperatura di parete e di mescolamento adimensionali e del flusso adimensionale di calore alla parete. E' stato scelto di rappresentare i casi per  $S_0 = \pm 10$  in modo che l'effetto della generazione interna fosse particolarmente evidente. Possono essere evidenziate due diverse situazione fisiche che dipendono essenzialmente dal segno di  $S_0$ . Quando  $S_0 > 0$ , il che corrisponde alla situazione in cui il fluido entra nel



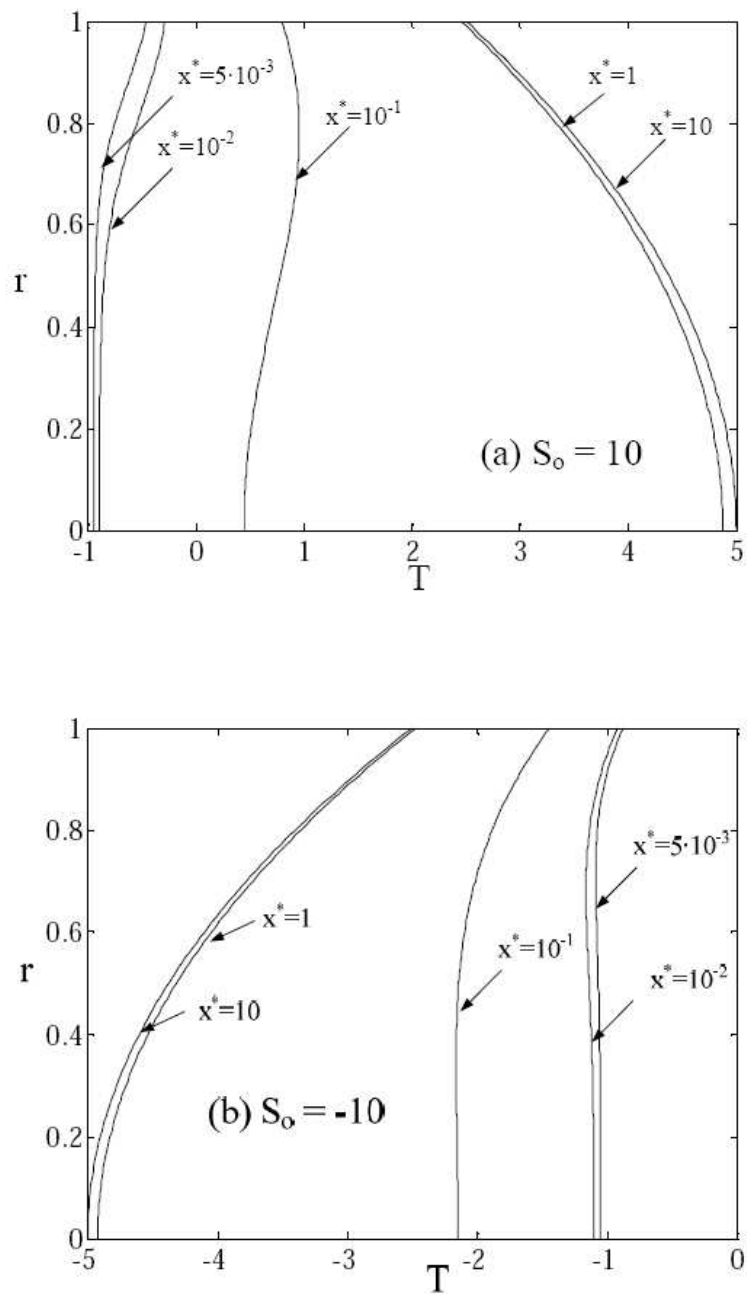


Figura 2.2: Distribuzione della temperatura adimensionale a diverse coordinate assiali;  $R_W = 0.25$

condotto a una temperatura inferiore a quella dell'ambiente, si osserva che la temperatura adimensionale di mescolamento è crescente, ossia il fluido è riscaldato per tutta la lunghezza del condotto. Il flusso termico scambiato alla parete entra nel sistema per un primo tratto di condotto, a valle del quale il calore è ceduto all'esterno. Quando  $S_0 < 0$ , il che corrisponde alla situazione in cui il fluido entra nel condotto a una temperatura già superiore a quella dell'ambiente, la temperatura adimensionale di mescolamento è decrescente, ossia la temperatura di mescolamento cresce. Inoltre, il flusso termico scambiato alla parete è diretto verso l'ambiente per tutta la lunghezza del condotto.

Nella regione di completo sviluppo, le distribuzioni del flusso di calore adimensionale scambiato alla parete e della temperatura adimensionale di parete e di mescolamento risultano indipendenti dalla coordinata assiale. Dalla soluzione del problema, Eq.(2.24), segue difatti che:

$$T_{w,fd} = R_W S_0 \quad (2.41)$$

e ancora:

$$\left. \frac{\partial T(x^*, r)}{\partial r} \right|_{r=1} = -\frac{S_0}{2} \quad (2.42)$$

ossia, tenendo in considerazione l'Eq.(2.31) e la definizione di  $S_0$ , si ottiene che il flusso termico scambiato alla parete nella regione di completo sviluppo è dato da:

$$q_W'' = -\frac{q_{gen}''' D}{4} \quad (2.43)$$

Dalla Eq.(2.43) segue che, definito il nuovo parametro adimensionale  $S^* = q_{gen}''' D / q_W''$  [11], esso assume per il caso T3, nella regione di completo sviluppo,

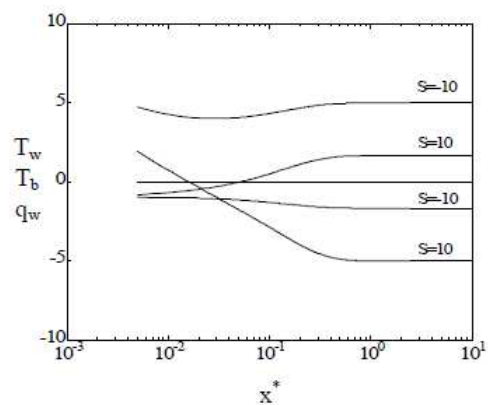
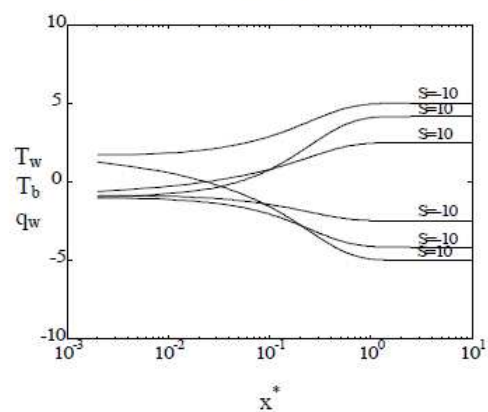
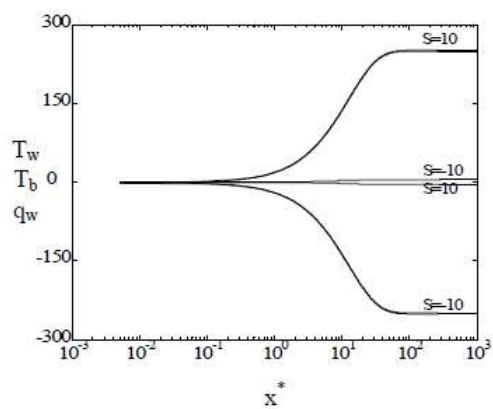
(a)  $R_w = 0$  (Caso T con generazione)(b)  $R_w = 0.25$ (c)  $R_w = 25$ 

Figura 2.3: Distribuzione della temperatura di parete e di mescolamento adimensionale del flusso di calore adimensionale scambiato alla parete

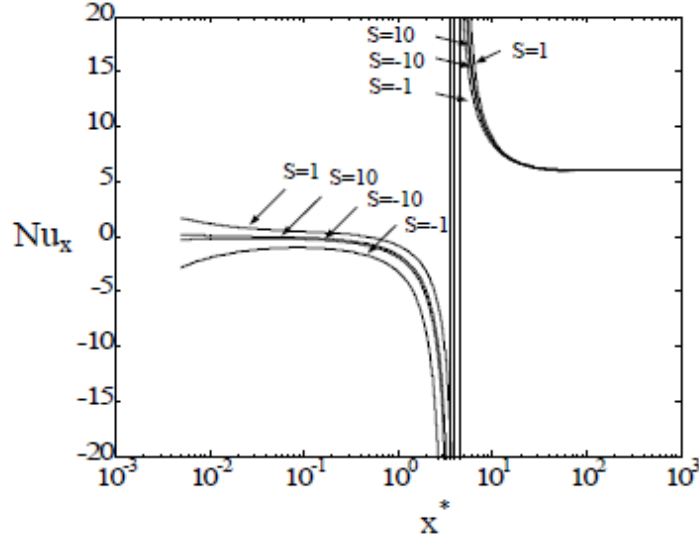


Figura 2.4: Distribuzione del numero di Nusselt locale;  $R_W = 0.25$

un valore costante, ossia:

$$S_{fd}^* = -4 \quad (2.44)$$

E' infine possibile osservare che il caso H con  $S^* = -4$  [19] ha il medesimo numero di Nusselt asintotico del caso T3, Eq. (2.35).

In Fig. 2.4 è rappresentata la distribuzione del numero di Nusselt locale per  $R_W = 25$  in funzione di  $S_0$ . Tutte le curve convergono asintoticamente a  $Nu_{x,fd} = 6$ , Eq.(2.35), indipendentemente dal valore assunto dai raggruppamenti adimensionali del problema.

Inoltre, si può osservare dalla Fig. 2.4 che nella regione di ingresso, in corrispondenza di determinati valori della coordinata assiale adimensionale, il numero di Nusselt locale tende a  $\pm\infty$ . In questi casi, come osservato anche da Shah e London [11], il significato del numero di Nusselt locale è puramente matematico e non è utile al calcolo del flusso termico scambiato alla parete a partire dal valore Nu.

Il problema analizzato nel lavoro presente è stato studiato anche da Hsu [20]. I risultati proposti in [20] sono limitati al dominio  $0 \leq x^* \leq 0.2$  che appartiene alla regione di ingresso termico. Utilizzando la soluzione approssimata proposta in [20] è possibile osservare che gli andamenti del numero di Nusselt locale, per i casi analizzati da Hsu ( $-1 \leq S_0 \leq 0$  e  $R_W = 0.25$ ), raggiungono lo sviluppo completo solo per  $x^* \sim 2$ , ove  $Nu \sim 6$ . La ragione per cui il valore asintotico  $Nu_{x,fd} = 6$ , Eq. (2.35), non è ottenuto in maniera esatta è probabilmente dovuta al metodo numerico utilizzato.

In Fig. 2.5 vengono confrontate le distribuzioni della temperatura di mescolamento adimensionale per  $S_0 = 10$  corrispondenti a  $R_W = 25, 2.5 \cdot 10^5$  e  $\infty$ . Si può osservare che la temperatura adimensionale di mescolamento per  $R_W = 25$  coincide con quella del caso adiabatico sino a  $x^* \sim 2$ , mentre quella per  $R_W = 2.5 \cdot 10^5$  fornisce la stessa distribuzione della temperatura di mescolamento del caso adiabatico sino ad  $x^* \sim 2 \cdot 10^4$ . Pertanto, all'atto pratico, questo ultimo caso può propriamente essere considerato adiabatico.

Inman [17] trova un eccellente accordo tra i dati sperimentali per un tubo con isolamento in fibra di vetro e i risultati analitici di Sparrow and Siegel [15] per il caso di parete adiabatica. Sulla base della Figura 2.5, questa concordanza è probabilmente dovuta al resto della lunghezza della sezione dello strumento sperimentale ( $x_{max}^* \approx 0.1$ ), che non era lungo abbastanza da ottenere le condizioni di completo sviluppo.

## 2.4 Considerazioni conclusive

E' stata analizzata la convezione forzata laminare in condotti cilindrici con generazione interna di calore uniforme e condizioni al contorno del terzo tipo.

Dall'analisi risulta che quando la resistenza termica adimensionale del-

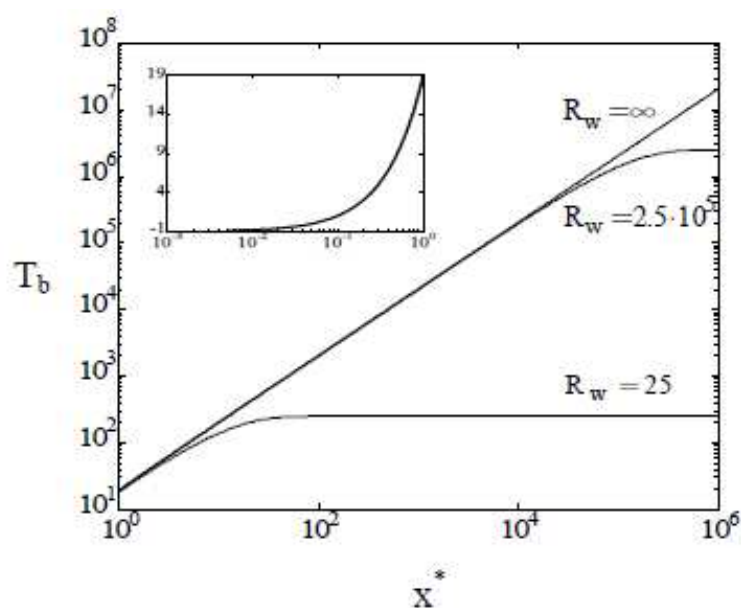


Figura 2.5: Confronto tra le distribuzioni della temperatura adimensionale di mescolamento del caso adiabatico e di casi T3 con  $R_W = 25, 2.5 \cdot 10^5$ ;  $S_0 = 10$

l'ambiente è finita o, eventualmente nulla (caso T), il numero di Nusselt asintotico assume un valore costante, indipendentemente dal valore dei raggruppamenti adimensionali del problema. Tale risultato trova spiegazione nel fatto che, nella regione di completo sviluppo, tutta la potenza termica generata viene ceduta all'ambiente.

E' stato inoltre osservato che i casi con  $R_W > 10^5$  possono essere considerati all'atto pratico casi adiabatici. Dai risultati ottenuti, è stato infine osservato che la definizione della differenza di temperatura caratteristica su cui è fondata la definizione del coefficiente di scambio termico convettivo locale, da cui quella del numero di Nusselt locale, è inappropriata per la regione di ingresso termico del problema oggetto di questo studio.



## Capitolo 3

# Convezione Laminare in condotti cilindrici con condizioni al contorno del terzo tipo e generazione interna di calore variabile

Lo studio della convezione forzata in condotti con generazione di calore variabile è di rilevanza pratica in diverse applicazioni, quali ad esempio il riscaldamento ohmico, per via della dipendenza della conduttività elettrica degli alimenti liquidi con la temperatura [30] , e nel settore chimico, nel caso di reazioni chimiche esotermiche o endotermiche [21]. Per una dettagliata rassegna bibliografica dei lavori teorici sull'argomento, si può fare riferimento al Paragrafo 1.2.

In questo Capitolo viene analizzata la convezione forzata laminare in condotti cilindrici con generazione interna di calore e condizioni al contorno del



terzo tipo. Le proprietà del fluido sono considerate costanti, mentre la generazione interna di calore è considerata variabile linearmente con la temperatura locale del fluido. L'analisi del presente Capitolo costituisce dunque l'estensione dell'analisi del Cap. 2, al caso con generazione interna di calore variabile.

Un caso simile a quello affrontato nel presente Capitolo, ma per un fluido non newtoniano in un condotto cilindrico con condizioni al contorno di temperatura uniforme, è stato analizzato da Foraboschi e Di Federico [21]. In [21] gli autovalori e le autofunzioni vengono calcolate utilizzando il metodo di Frobénius. Mori et al. [22] estendono l'analisi [21] al caso coniugato di convezione forzata laminare in un condotto cilindrico con temperatura imposta alle pareti esterne del condotto.

Nel presente Capitolo si è fatto riferimento alla trattazione proposta da Foraboschi e Di Federico [21], sostituendo alle autofunzioni ricercate in [21] mediante il metodo di Frobénius, una soluzione analitica esatta, espressa in termini di funzioni di Poiseuille [34]. Indubbi sono dunque i vantaggi dal punto di vista della precisione di calcolo, a parità di tempi richiesti per l'elaborazione dei dati.

Vengono rappresentati e discussi i risultati dei parametri principali di scambio termico nella regione di ingresso termico e di completo sviluppo, sia nel caso di generazione interna di calore crescente con la temperatura, che decrescente. Infine, vengono inclusi e discussi nella trattazione come sottocasi della condizione al contorno del terzo tipo, i casi con temperatura di parete uniforme (condizione al contorno di tipo T) e quello di parete adiabatica.

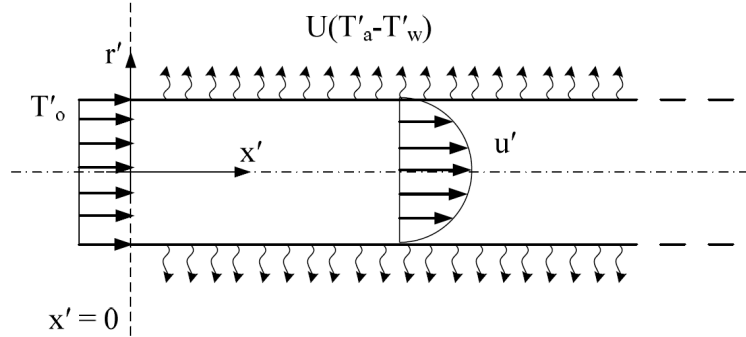


Figura 3.1: Geometria e condizioni al contorno

### 3.1 Equazioni e strategie di soluzione

Il problema considerato è riportato schematicamente in Figura 3.1. Un fluido newtoniano a proprietà costanti scorre in un condotto cilindrico con generazione interna di calore dipendente linearmente dalla temperatura. Il profilo di velocità è completamente sviluppato, mentre il profilo di temperatura all'ingresso della sezione di sviluppo termico è uniforme. Alla parete viene considerata una condizione al contorno convettiva con coefficiente di scambio termico e con una temperatura di ambiente costante. Vengono trascurate la dissipazione viscosa e la conduzione di calore assiale.

Il problema è descritto matematicamente come segue:

Conservazione dell'energia

$$2W\rho c_p \left(1 - \left(\frac{r'}{D/2}\right)^2\right) \frac{\partial T'}{\partial x'} = k \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \frac{\partial T'}{\partial r'}\right) + q_o'''(1 + \beta'_0(T' - T'_0)) \quad (3.1)$$

Condizioni al contorno

$$T'(0, r') = T'_0 \quad \text{per } x' = 0 \quad (3.2)$$

$$\left. \frac{\partial T'}{\partial r'} \right|_{r'=0} = 0 \quad \text{per } 0 < x' < +\infty \quad (3.3)$$

$$-k \left. \frac{\partial T'}{\partial r'} \right|_{r'=D/2} = U(T'|_{r'=D/2} - T'_a) \quad \text{per } 0 < x' < +\infty \quad (3.4)$$

Le equazioni (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) sono quindi espresse in forma adimensionale, secondo le seguenti variabili adimensionali:

$$x^* = x'/(PeD/2)$$

$$r = r'/(D/2)$$

$$T = (T' - T'_a)/\Delta T'_{ref}$$

Sono possibili diverse scelte per  $\Delta T'_{ref}$ : le più frequenti sono  $\Delta T'_{ref} = T'_a - T'_0$  e  $\Delta T'_{ref} = q_0''' D^2/4k$ . Nel presente lavoro, viene utilizzata la prima forma, poiché porta ad una espressione più conveniente per il trattamento della condizione al contorno adimensionale all'imbocco.

Le equazioni (3.1) e relative condizioni al contorno (3.2), (3.3), (3.4), diventano:

$$(1 - r^2) \frac{\partial T}{\partial x^*} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + S_0 + S_1^2 T \quad (3.5)$$

$$T(0, r) = -1 \quad \text{per } x^* = 0 \quad (3.6)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad \text{per } 0 < x^* < +\infty \quad (3.7)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=1} + \frac{1}{2R_W} T|_{r=1} = 0 \quad \text{per } 0 < x^* < +\infty \quad (3.8)$$

I parametri adimensionali sono dati dalle formule:

$$R_W = \frac{k}{UD}$$

$$S_0 = \frac{q_0'''(1 + \beta_0'(T_a' - T_0'))D^2}{4k(T_a' - T_0')}$$

$$S_1^2 = \frac{q_0'''\beta_0'D^2}{4k}$$

$R_W$  è la resistenza termica ambientale adimensionale;  $S_0$  e  $S_1$  derivano dal termine di generazione di calore. La soluzione delle equazioni (3.5), (3.6), (3.7), (3.8) può essere decomposta in:

$$T(x^*, r) = T_1(r) + T_2(x^*, r) \quad (3.9)$$

Sostituendo l'Equazione (3.9) nelle Equazioni (3.5), (3.6), (3.7), (3.8), segue che la funzione  $T_1(r)$  è la soluzione della seguente equazione differenziale ordinaria:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT_1}{dr} \right) + S_0 + S_1^2 T_1 = 0 \quad (3.10)$$

con le condizioni al contorno:

$$\left. \frac{dT_1}{dr} \right|_{r=0} = 0 \quad \text{per } 0 < x^* < +\infty \quad (3.11)$$

$$\left. \frac{dT_1}{dr} \right|_{r=1} + \frac{1}{2R_W} T_1|_{r=1} = 0 \quad \text{per } 0 < x^* < +\infty \quad (3.12)$$

Le soluzioni delle Equazioni (3.10), (3.11), (3.12), è data da:

$$T_1(r) = \frac{S_0}{S_1} \frac{J_0(S_1 r)}{J_0(S_1) - 2R_W S_1 J_1(S_1)} - \frac{S_0}{S_1^2} \quad (3.13)$$

L'Equazione (3.13) non è valida per i valori  $S_1^2$  che rende nullo il denominatore dell'Equazione (3.13). La funzione  $T_2(x^*, r)$  è quindi la soluzione della seguente equazione differenziale parziale:

$$(1 - r^2) \frac{\partial T_2}{\partial x^*} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T_2}{\partial r} \right) + S_1^2 T_2 \quad (3.14)$$

con le condizioni al contorno:

$$T_2(0, r) = -1 - T_1(r) \quad \text{per } x^* = 0 \quad (3.15)$$

$$\left. \frac{\partial T_2}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad \text{per } 0 < x^* < +\infty \quad (3.16)$$

$$\left. \frac{\partial T_2}{\partial r} \right|_{r=1} + \frac{1}{2R_W} T_2|_{r=1} = 0 \quad \text{per } 0 < x^* < +\infty \quad (3.17)$$

Seguendo il metodo di separazione delle variabili, la funzione  $T_2(x^*, r)$  può essere espressa come:

$$T_2(x^*, r) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i g_i(x^*) f_i(r) \quad (3.18)$$

Le funzioni  $g_i(x^*)$  e  $f_i(r)$  sono soluzione di:

$$\frac{dg_i}{dx^*} = -\lambda_i g_i \quad \text{per } 0 < x^* < +\infty \quad (3.19)$$

$$\frac{d^2 f_i}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df_i}{dr} + S_1^2 f_i = -\lambda_i f_i (1 - r^2) \quad \text{per } 0 < r < 1 \quad (3.20)$$

L'Equazione (3.20) è completata dalle seguenti condizioni al contorno:

$$\left. \frac{df_i}{dr} \right|_{r=0} = 0 \quad (3.21)$$

$$\left. \frac{df_i}{dr} \right|_{r=1} + \frac{1}{2R_W} f_i|_{r=1} = 0 \quad (3.22)$$

Introducendo le seguenti posizioni

$$\begin{aligned} \mu_i &= \lambda_i^{1/2} \\ \alpha_i &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\mu_i}{2} - \frac{S_1^2}{2\mu_i} \right) \end{aligned}$$

una soluzione generica dell'Equazione (3.20) è data dalla funzione di Poisseulle vincolata all'asse del condotto, tale che la condizione al contorno di simmetria assiale, in Equazione (3.21), è sempre soddisfatta [23]:

$$f_i(r) = pe(r, \mu_i) = e^{[-\mu_i r^2/2]} {}_1F_1 [\alpha_i, 1, \mu_i r^2] \quad (3.23)$$

I valori ammissibili della costante di separazione  $\lambda_i$  sono le radici dell'equazione trascendente (3.22). La ricerca di queste radici può essere facilmente eseguito mediante una procedura numerica.

Una soluzione generale dell'Equazione (3.19) può essere espressa in termini della funzione esponenziale:

$$g_i(x^*) = e^{-\lambda_i x^*} \quad \text{per } 0 < x^* < +\infty \quad (3.24)$$

Le costanti  $A_i$  che soddisfano le condizioni al contorno Equazioni (3.15) sono determinate mediante la seguente procedura. Dalle Equazioni (3.15), (3.18), (3.24) segue:

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i f_i(r) = -1 - T_1(r) \quad (3.25)$$

Può essere facilmente dimostrato che le funzioni  $f_i(r)$ , con le condizioni al contorno Equazioni (3.21) e (3.22), garantiscono:

$$\int_{r=0}^{r=1} (1-r^2) f_i(r) f_j(r) r dr \begin{cases} = 0 & \text{se } i \neq j \\ \neq 0 & \text{se } i = j \end{cases} \quad (3.26)$$

Moltiplicando entrambi i membri dell'Equazione (3.25) per  $(1-r^2)f_j(r)re$  integrando da  $r = 0$  a  $r = 1$ , sulla base della proprietà data dall'Equazione (3.26), segue:

$$A_j = \frac{\int_0^1 (-1 - T_1(r)) f_j(r) (1-r^2) r dr}{\int_0^1 f_j^2(r) (1-r^2) r dr}, j = 1, 2, 3, \dots \quad (3.27)$$

Dalle Equazioni (3.9), (3.13), (3.18), (3.24) segue:

$$T(x^*, r) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i e^{-\lambda_i x^*} f_i(r) + \frac{S_0}{S_1^2} \frac{J_0(S_1 r)}{J_0(S_1) - 2R_W S_1 J_1(S_1)} - \frac{S_0}{S_1^2} \quad (3.28)$$

La temperatura di mescolamento adimensionale, con il flusso di calore alla parete (positivo in direzione entrante nel sistema) e il numero di Nusselt locale sono dati da:

$$T_b(x^*) = 4 \int_{r=0}^1 (1-r^2) T r dr \quad (3.29)$$

$$q_W(x^*) = \frac{q_W''}{2k(T_a' - T_0')/D} = \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=1} \quad (3.30)$$

$$Nu_x = 2 \frac{\partial T / \partial r|_{r=1}}{T_W - T_b} \quad (3.31)$$

Dalle Equazioni (3.20), (3.28), (3.29) segue:

$$T_b(x^*) = -4 \sum_{i=1}^{\infty} A_i e^{-\lambda_i x^*} \left[ \frac{1}{\lambda_i} \frac{df_i}{dr} \Big|_{r=1} + \frac{S_1^2}{\lambda_i} \int_{r=0}^1 f_i(r) r dr \right] + \frac{S_0}{S_1^2} \frac{1}{J_0(S_1) - 2R_W S_1 J_1(S_1)} \frac{8J_2(S_1)}{S_1^2} - \frac{S_0}{S_1^2} \quad (3.32)$$

Dall'Equazione (3.28), il flusso adimensionale di calore, Equazione (3.30), diventa:

$$q_W(x^*) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i e^{-\lambda_i x^*} \frac{df_i}{dr} \Big|_{r=1} - \frac{S_0}{S_1^2} \frac{S_1 J_1(S_1)}{J_0(S_1) - 2R_W S_1 J_1(S_1)} \quad (3.33)$$

Nel presente caso, la condizione di completo sviluppo è ottenuta per  $x^* \rightarrow \infty$  [11]. In questa regione, la distribuzione adimensionale di temperatura, Equazione (3.28), è indipendente da  $x^*$ . Calcolando il limite dell'Equazione (3.28) per  $x^* \rightarrow \infty$ , segue:

$$T_{fd}(r) = \frac{S_0}{S_1^2} \frac{J_0(S_1 r)}{J_0(S_1) - 2R_W S_1 J_1(S_1)} - \frac{S_0}{S_1^2} \quad (3.34)$$

Il numero di Nusselt completamente sviluppato è ottenuto sostituendo le Equazioni (3.28), (3.32), (3.33) nell'Equazione (3.31) e calcolando il limite per  $x^* \rightarrow \infty$ :

$$Nu_\infty = 2 \frac{-S_1 J_1(S_1)}{J_0(S_1) - 8J_2(S_1)/(S_1^2)} \quad (3.35)$$

Per effetto della generazione interna di calore, la temperatura del fluido sarà sempre superiore a quella ambiente. Affinché la soluzione qui proposta (3.34), non violi tale requisito fisico, è necessario limitare i valori di indagine del parametro  $S_1^2$  come segue:

$$S_1^2 < a_1^2$$

ove  $a_1$  è la prima radice della seguente equazione, valida sia per il caso  $T_3$  sia per il caso  $T$ :

$$J_0(a_i) - 2R_W a_i J_i(a_i) = 0 \quad (3.36)$$

Dalla Equazione (3.36) si osserva che  $a_i$  è funzione solo di  $R_W$ .

In Tabella 3.1 sono riassunti i valori del parametro  $S_1^2$ , calcolati per diversi valori di  $R_W$ . Si osserva che l'andamento  $a_1^2(R_W)$  è decrescente con  $R_W$  e tende a zero quando  $R_W$  tende all'infinito. Non è dunque possibile il caso adiabatico  $R_W = 0$  quando  $S_1^2 > 0$ . Non vi è limite invece inferiore al parametro  $S_1^2$ . Il valore limite  $a_1^2$  corrispondente al caso T ( $R_W = 0$ ) è in eccellente accordo con quello calcolato da Foraboschi e Di Federico [21] e da Mori et al. [22].



Tabella 3.1: Valori del parametro  $a_1^2$ 

$R_w$	$a_1^2$
0	5.78
$10^{-2}$	5.56
$10^{-1}$	3.96
$10^0$	0.89
$10^1$	0.10
$10^2$	0.01
$10^3$	$10^{-3}$
$10^4$	$10^{-4}$

### Temperatura di parete uniforme

Nella letteratura, il caso T è stato analizzato da Foraboschi e Di Federico [21]. Nella presente analisi, questo caso è ottenuto per  $R_w = 0$ . Dall'Equazione (3.28) segue:

$$T(x^*, r) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i e^{-\lambda_i x^*} f_i(r) + \frac{S_0}{S_1^2} \frac{J_0(S_1 r)}{J_0(S_1)} - \frac{S_0}{S_1^2} \quad (3.37)$$

Gli autovalori  $\lambda_i$  sono le radici della seguente equazione trascendente (Equazione (3.22)):

$$f_i|_{r=1} = 0 \quad (3.38)$$

L'Equazione (3.26) è ancora soddisfatta. Quindi le costanti  $A_i$  sono date dall'Equazione (3.27). La temperatura di mescolamento adimensionale, Equazione (3.32) e il flusso di calore adimensionale alla parete (3.33), divengono:

$$T_b(x^*) = -4 \sum_{i=1}^{\infty} A_i e^{-\lambda_i x^*} \left[ \frac{1}{\lambda_i} \frac{df_i}{dr} \Big|_{r=1} + \frac{S_1^2}{\lambda_i} \int_0^1 f_i(r) r dr \right] + \frac{S_0}{S_1^2} \frac{1}{J_0(S_1)} \frac{8J_2(S_1)}{S_1^2} - \frac{S_0}{S_1^2} \quad (3.39)$$

$$q_W(x^*) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i e^{-\lambda_i x^*} \frac{df_i}{dr} \Big|_{r=1} - \frac{S_0}{S_1^2} \frac{S_1 J_1(S_1)}{J_0(S_1)} \quad (3.40)$$

Il numero di Nusselt completamente sviluppato è ottenuto ancora dall'Equazione (3.35).

Inoltre, nella presente analisi le funzioni  $f_i(r)$  sono espresse come funzioni di Poiseuille, Equazione (3.23), mentre in [21] sono state calcolate mediante il metodo di Frobenius.

### Parete adiabatica (valido solo per $S_1^2 < 0$ )

Un caso particolare della presente condizione al contorno di parete, Equazione (3.8), è quella di parete adiabatica, ottenuta per  $R_W \rightarrow \infty$ . Dall'Equazione (3.28) segue:

$$T(x^*, r) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i e^{-\lambda_i x^*} f_i(r) - \frac{S_0}{S_1^2} \quad (3.41)$$

Gli autovalori  $\lambda_i$  sono le radici della seguente equazione trascendente (Equazione (3.22)):

$$\frac{df_i}{dr} \Big|_{r=1} = 0 \quad (3.42)$$

L'Equazione (3.26) è ancora soddisfatta. Quindi le costanti  $A_i$  sono date dall'Equazione (3.27). La temperatura di mescolamento adimensionale, Equazione (3.32), diventa:

$$T_b(x^*) = -4 \sum_{i=1}^{\infty} A_i e^{-\lambda_i x^*} \frac{S_1^2}{\lambda_i} \int_0^1 f_i(r) r dr - \frac{S_0}{S_1^2} \quad (3.43)$$

### 3.1.1 Generazione interna di calore costante con condizioni al contorno del terzo tipo

Il sottocaso con generazione di calore costante ( $S_1^2 = 0$ ) sono ottenibili dalla presente soluzione con generazione costante, Equazione (3.28) come limite per  $S_1^2 \rightarrow 0$ .

## 3.2 Risultati e discussione

Nelle prossime sezione verranno analizzati e discussi i risultati, separatamente per il caso con  $S_1^2 > 0$  e con  $S_1^2 < 0$ .

### 3.2.1 Caso con $S_1^2 > 0$

Sono stati calcolati i primi venti valori della costante di separazione  $i$  per  $R_w = 0, 0.25, 25$  e  $0 \leq S_1^2 \leq 2$  in virtù dei quali il calcolo della temperatura adimensionale, Eq.(3.28), risulta accurato per  $x^* \leq 5 \cdot 10^{-3}$ . Nelle Tabelle 3.2, 3.3, 3.4 sono riportati i primi dieci autovalori.

Le radici delle equazioni (3.23), (3.38) e (3.42), che forniscono gli autovalori  $\lambda_i$  come funzione di  $R_w$  e  $S_1^2$ , sono state calcolate numericamente. Il presente calcolo è stato validato dal confronto con alcuni risultati da letteratura [15],[20],[25],[26], come sintetizzato nella Tabella 3.5. Gli autovalori per  $R_w = 0$  e  $S_1^2 = 0$  e quelli per  $R_w = 0.25$  e  $S_1^2 = 0$  sono in eccellente corrispondenza con quelli forniti da Barr e Wiginton [25] e Hsu [20], rispettivamente. I presenti autovalori per  $R_w \rightarrow \infty$  e  $S_1^2 = 0$  sono anche in eccellente corrispondenza con quelli forniti da Barr e Wiginton [26] e Sparrow e Siegel [15].

Tabella 3.2: I primi dieci autovalori,  $R_W = 0$  (caso T)

N	$S_1^2 = 0$	$S_1^2 = 0.1$	$S_1^2 = 1$	$S_1^2 = 2$
1	7.3135869	7.1884425	6.0601583	4.8022303
2	44.609461	44.463836	43.152553	41.694217
3	113.92103	113.76732	112.38371	110.84603
4	215.24054	215.08209	213.65595	212.07132
5	348.56412	348.40241	346.94708	345.33014
6	513.89006	513.72593	512.24882	510.60771
7	711.21753	711.05150	709.55723	707.89709
8	940.54606	940.37846	938.87020	937.19450
9	1201.8753	1201.7065	1200.1864	1198.4977
10	1495.2052	1495.0352	1493.5051	1491.8052

Dall'analisi delle Tabelle 3.2, 3.3, 3.4, si osserva che l'andamento  $\lambda_i(R_W, S_1^2)$ , per un fissato valore di  $S_1^2$ , è decrescente con  $R_W$ . Per un fissato valore di  $R_W$ , l'andamento  $\lambda_i(R_W, S_1^2)$  è decrescente con  $S_1^2$  e il valore della prima radice  $\lambda_1$  tende a zero quando  $S_1^2$  tende al valore limite  $a_1^2(R_W)$  di Tab. 3.1. Infine, si osserva che l'andamento  $\lambda_i(R_W, S_1^2)$  è indipendente da  $S_1^2$  quando  $i \rightarrow \infty$ .

Nel Capitolo 2 e in [16] è stata analizzata l'influenza del termine  $S_0$  sulle distribuzioni adimensionali della temperatura di mescolamento e di parete e del flusso termico alla parete ed è stato osservato che tali distribuzioni sono fortemente influenzate dal segno di  $S_0$ , che fisicamente è positivo o negativo a seconda che il fluido entri nel condotto ad una temperatura inferiore o superiore a quella dell'ambiente. Dal momento che l'influenza del termine  $S_0$  è già stata oggetto di analisi nel Capitolo 2 e in [16], i risultati ottenuti nel presente lavoro fanno riferimento ad un singolo valore di  $S_0$  ( $S_0 = 10$ ) e sono

Tabella 3.3: I primi dieci autovalori,  $R_w = 0.25$ 

N	$S_1^2 = 0$	$S_1^2 = 0.1$	$S_1^2 = 0.5$	$S_1^2 = 1$
1	4.0000000	3.8475340	3.2346846	2.4617133
2	32.992650	32.807501	32.066382	31.138916
3	93.027181	92.834651	92.064606	91.102255
4	184.69703	184.50163	183.72020	182.74384
5	308.17107	307.97423	307.18706	306.20353
6	463.52136	463.32369	462.53318	461.54544
7	650.78560	650.58740	649.79476	648.80431
8	869.98611	869.78755	868.99345	868.00114
9	1121.1373	1120.9384	1120.1433	1119.1497
10	1404.2489	1404.0499	1403.2540	1402.2593

Tabella 3.4: I primi dieci autovalori,  $R_w = 25$ 

N	$S_1^2 = 0$	$S_1^2 = 0.01$	$S_1^2 = 0.02$	$S_1^2 = 0.03$
1	0.0792722	0.0593672	0.0394539	0.0195324
2	25.781377	25.761378	25.741382	25.721387
3	83.977669	83.957669	83.937671	83.917674
4	174.29374	174.27374	174.25374	174.23374
5	296.67259	296.65259	296.63259	296.61259
6	451.09157	451.07158	451.05158	451.03158
7	637.53894	637.51894	637.49894	637.47894
8	856.00765	855.98765	855.96765	855.94765
9	1106.4931	1106.4731	1106.4531	1106.4331
10	1388.9922	1388.9722	1388.9522	1388.9322

finalizzati all'analisi dell'influenza del parametro  $S_1^2$ .

Nella Fig.3.2 viene mostrata l'influenza di  $S_1^2$  sulla distribuzione adimensionale della temperatura di mescolamento e del flusso termico alla parete nei casi rispettivamente con  $R_W = 0, 0.25, 25$  e per  $S_0 = 10$ . Si osserva che le distribuzioni delle quantità  $T_b(x^*)$  e  $q_W(x^*)$  sono fortemente influenzate dal valore assunto da  $S_1^2$ , in particolar modo nella regione di completo sviluppo e per valori crescenti di  $R_W$ . In tale zona, inoltre, le distribuzioni sono indipendenti dalla coordinata assiale. Per fissati valori dei parametri adimensionali  $S_0$ ,  $S_1^2$  e  $R_W$ , esiste pertanto un limite superiore al valore di temperatura che il fluido può raggiungere. Come già osservato in [16], difatti, nella regione di completo sviluppo tutta la potenza termica generata viene ceduta all'ambiente.

Nelle applicazioni, in modo da garantire una uniformità di trattamento termico all'alimento, la distribuzione di temperatura è bene sia piuttosto uniforme in ogni sezione di passaggio del condotto [5]. Dai risultati in [16] si può osservare che la distribuzione radiale della temperatura adimensionale presenta apprezzabili disomogeneità particolarmente nella zona di completo sviluppo. Nella Fig.3.2.1 è stata pertanto rappresentata l'influenza di  $S_1^2$  sulla distribuzione radiale della temperatura adimensionale nella regione di completo sviluppo. Si può osservare che tanto più  $S_1^2$  è grande, tanto meno la distribuzione di temperatura adimensionale nella regione di completo sviluppo è uniforme. L'influenza è inoltre tanto più marcata quanto più  $R_W$  è piccolo.

In [16] è stato osservato che nella regione di ingresso termico, in corrispondenza di un particolare valore della coordinata assiale adimensionale, il numero di Nusselt locale tende a  $\pm\infty$ . In questi casi, come osservato anche da Shah e London [11], non è più praticabile il calcolo del flusso termico

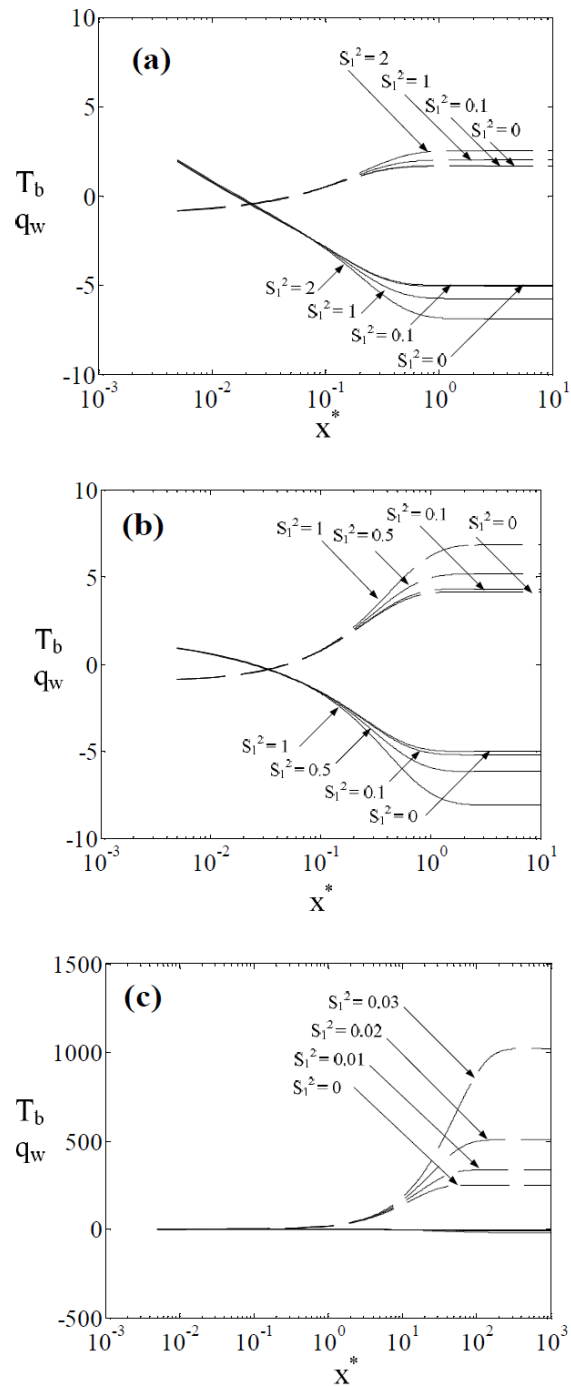


Figura 3.2: Distribuzione adimensionale della temperatura di mescolamento e del flusso di calore alla parete (- - :  $T_b$ ; — :  $q_w$ ),  $S_0 = 10$ ; (a):  $R_W = 0$  (caso T); (b):  $R_W = 0.25$ ; (c):  $R_W = 25$

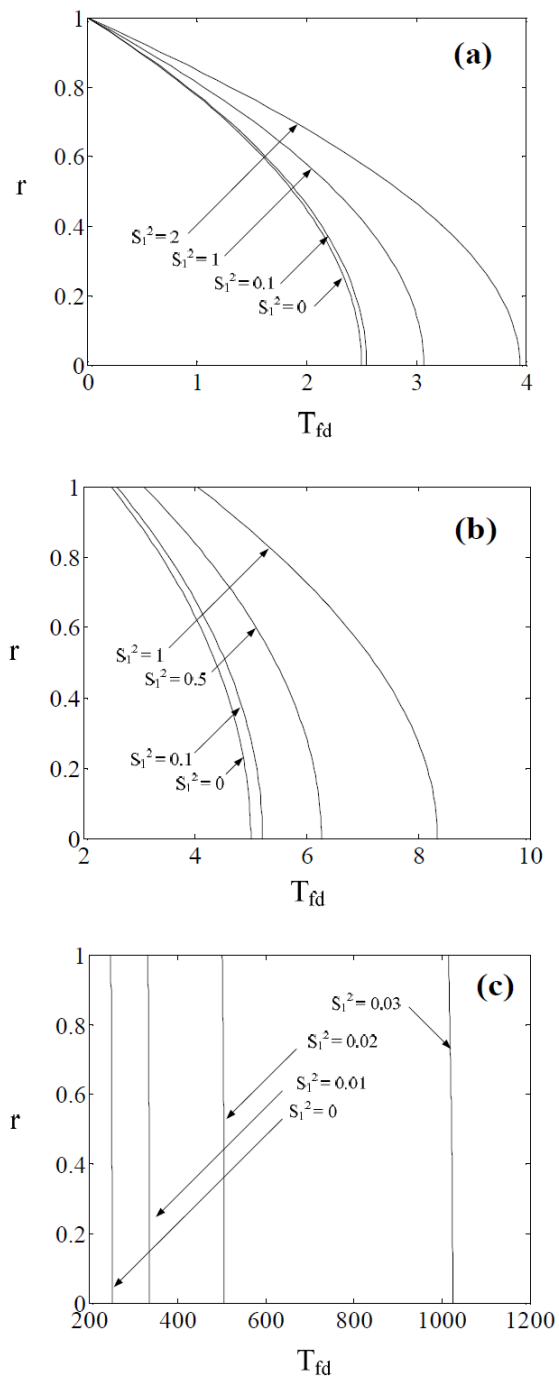


Figura 3.3: Distribuzione della temperatura adimensionale nella regione di completo sviluppo,  $S_0 = 10$ ; (a):  $R_W = 0$  (caso T); (b):  $R_W = 0.25$ ; (c):  $R_W = 25$



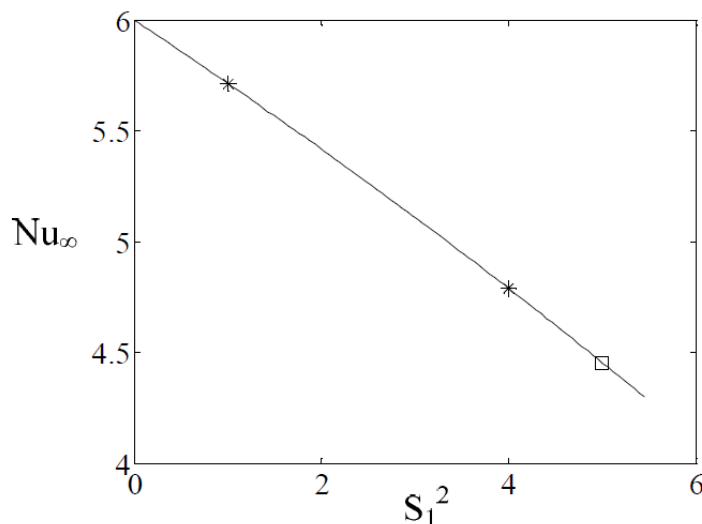


Figura 3.4: Numero di Nusselt locale, regione di completo sviluppo (linea continua: analisi presente; asterisco [21]; quadrati: [22]);

locale scambiato alla parete secondo lo schema  $q''_W(x') = h_x(T'_W - T'_b)$ . Le stesse osservazioni si estendono al caso oggetto della presente analisi. Nel presente lavoro, pertanto, le distribuzioni del numero di Nusselt locale nella regione di ingresso termico non compaiono.

In Fig.3.4 è rappresentata l'influenza di  $S_1^2$  sul numero di Nusselt corrispondente alla regione di completo sviluppo. Dalla Fig.3.4 si può osservare che i risultati ottenuti sono in eccellente accordo con quelli prodotti da Foraboschi e Di Federico [21], per  $S_1^2 = 1.4$ , e da Mori et al. [22], per  $S_1^2 = 5$ .

### 3.2.2 Caso con $S_1^2 < 0$

Nel presente paragrafo sono stati considerati valori negativi del parametro adimensionale  $S_1^2$ . Nell'applicazione pratica questo è il caso del riscaldamento ohmico dei cibi nei riscaldatori collineari. Poiché la generazione di calore cala quando la temperatura aumenta, i valori negativi di  $S_1^2$  introducono un

effetto stabilizzante nel campo della temperatura, . Ogni valore negativo di  $S_1^2$  è permesso (vedi appendice I per ulteriori dettagli). Viene dunque analizzata l'influenza dei parametri adimensionali  $S_0$ ,  $S_1^2$  e  $R_w$  sulle quantità di calore trasmesso alla parete e sulla distribuzione radiale della temperatura adimensionale.

Sebbene il numero di Nusselt sia tradizionalmente il principale obiettivo in una presentazione di risultati di trasferimento di calore, ci sono due principali ragioni per non fornirlo nella presente analisi. Come osservato da Faghri e Sparrow [24] in un problema di trasferimento di calore di tipo coniugato, nel presente caso il numero di Nusselt locale, Eq. (3.31), include tre incognite,  $\partial T/\partial r|_{r=1}$ ,  $T_w$  e  $T_b$ , e quindi per un dato valore di  $Nu_x$ , viene stabilita una relazione tra queste tre incognite, ma non c'è modo di ottenere i loro valori effettivi. Inoltre, in corrispondenza di certe posizioni assiali specifiche, dipendenti da  $R_w$ ,  $S_0$ , e  $S_1^2$ , la temperatura di parete e di mescolamento raggiungono lo stesso valore, portando ad una singolarità nella distribuzione di  $Nu_x$ . In tali situazioni, come osservato da Shah and London [11], il concetto di coefficiente di trasferimento di calore perde il suo significato. Considerando questi difetti, è necessario mostrare i risultati per  $q_w$ ,  $T_b$  e  $T_w$ .

Per tutti i casi documentati nel presente capitolo, sono considerati nel calcolo venti autovalori  $\lambda_i$ . Questo assicura una accurata distribuzione di temperatura adimensionale per  $x^* \geq 5 \cdot 10^{-3}$ . I valori di  $\lambda_i$  e  $A_i$  per  $R_w = 0$ , 0.25 e 25 e  $S_1^2 = 0, -0.1, -1$  e  $-10$  sono riassunti nelle Tabelle 3.6, 3.7, 3.8, 3.9, 3.10 e 3.11. Può essere osservato che  $\lambda_i$  cresce al calare di  $S_1^2$ . Inoltre, la differenza tra i valori di  $\lambda_i$  corrispondenti a due diversi valori di  $S_1^2$  sono meno marcati al crescere dell'indice  $i$ .

In Fig.3.5 è mostrato il primo autovalore  $\lambda_1$  come funzione di  $S_1^2$ . Si può osservare che quando  $S_1^2 < -10$ ,  $\lambda_1$  diventa indipendente da  $R_w$ . Inoltre,

Tabella 3.5: Confronto del presente calcolo degli autovalori con i risultati da letteratura per  $S_1^2 = 0$  (generazione di calore uniforme)

$R_W = 0$			
N	present	[25]	
1	7.313587	7.313586	
2	44.609461	44.609451	
3	113.921031	113.921021	
4	215.240543	215.240540	
5	348.564115	348.563965	

$R_W = 0.25$			
N	Present	[20]	
1	4.000000	4.00000	
2	32.99264983	32.99261697	
3	93.0271811	93.0271824	
4	184.6970279	184.6962541	
5	308.1710673	308.2974106	

$R_W \rightarrow \infty$			
N	Present	[26]	[15]
1	25.679612	25.67961	25.6796
2	83.86176	83.86176	83.8618
3	174.16674	174.16673	174.167
4	296.53630	296.53613	296.536
5	450.94719	450.94702	450.947

Tabella 3.6: Autovalori per  $R_w = 0$  come funzione di  $S_1^2$  (prima parte)

N	$S_1^2 = 0$		$S_1^2 = -0.1$	
	$\lambda_i$	$A_i$	$\lambda_i$	$A_i$
1	7.3135869	1.388203267	7.4386877	1.340009992
2	44.6094611	0.31039996	44.7550708	0.313154822
3	113.9210308	-0.39196801	114.0747427	-0.392906137
4	215.2405433	0.371018314	215.3990012	0.37152195
5	348.5641154	-0.340038431	348.7258240	-0.340360773
6	513.8900606	0.311565363	514.0541927	0.311791715
7	711.2175327	-0.287178948	711.3835712	-0.287347458
8	940.5460565	0.266511119	940.7136511	0.266641793
9	1201.8753426	-0.248912282	1202.0442419	-0.249016743
10	1495.2052025	0.233792828	1495.3752189	0.233878331
11	1820.5355081	-0.220677136	1820.7064963	-0.220748463
12	2177.8661682	0.209193174	2178.0380134	0.209253611
13	2567.1971163	-0.199051229	2567.3697252	-0.199103113
14	2988.5283022	0.190024507	2988.7015982	0.190069546
15	3441.8596873	-1.602986155	3442.0336062	-0.181973346
16	3927.1912414	0.174636383	3927.3657289	0.17467127
17	4444.5229406	-0.168016796	4444.6979500	-0.168047857
18	4993.8547652	-0.156452612	4994.0302563	0.162009094
19	5575.1907558	0.151366851	5575.3626371	-0.156477701
20	6188.5187300	-0.146670446	6188.6950833	0.151389584

Tabella 3.7: Autovalori per  $R_w = 0$  come funzione di  $S_1^2$  (seconda parte)

N	$S_1^2 = -1$		$S_1^2 = -10$	
	$\lambda_i$	$A_i$	$\lambda_i$	$A_i$
1	8.5626545	2.926201377	19.6287006	-0.463159628
2	46.0648756	6.787110993	59.0874066	0.541625378
3	115.4579720	10.74513713	129.2681523	-0.482167692
4	216.8251032	14.72498228	231.0819154	0.421064235
5	350.1812390	18.71313012	364.7379380	-0.372402065
6	515.5314424	22.70531749	530.3091885	0.334374036
7	712.8779864	26.69977502	727.8284206	-0.304179734
8	942.2220717	30.69563604	957.3128508	0.279697814
9	1203.5644042	34.69242575	1218.7725461	-0.259451794
10	1496.9054311	38.68986212	1512.2138593	0.24241657
11	1822.2454524	42.68776701	1837.6410356	-0.227868061
12	2179.5846781	46.6860223	2195.0570411	0.215283566
13	2568.9232608	50.68454657	2584.4640234	-0.204277472
14	2990.2613142	54.68328185	3005.8635832	0.194559494
15	3443.5989254	58.68218576	3459.2569429	-0.185907059
16	3928.9361621	62.68122655	3944.6450556	0.178146669
17	4446.2730784	66.68038001	4462.0286773	-0.171141065
18	4995.6097176	70.67962732	5011.4084171	0.164780199
19	5576.9461152	74.67895363	5592.7847724	-0.15897478
20	6190.2823006	78.67834709	6206.1581538	0.153651566

Tabella 3.8: Autovalori per  $R_w = 0.25$  come funzione di  $S_1^2$  (prima parte)

N	$S_1^2 = 0$		$S_1^2 = -0.1$	
	$\lambda_i$	$A_i$	$\lambda_i$	$A_i$
1	4.0000000	4.271590864	4.1521725	4.070498831
2	32.992650	-0.302858786	33.177743	-0.2957327762
3	93.027181	0.021286666	93.219717	0.0191187892
4	184.697028	0.028917692	184.892447	0.0300202931
5	308.171067	-0.039117946	308.367925	-0.0397955732
6	463.521362	0.039470475	463.719050	0.0399308594
7	650.785602	-0.037127246	650.983816	-0.0374607113
8	869.986106	0.034167801	870.184679	0.0344204822
9	1121.13726	-0.031252141	1121.33609	-0.0314501847
10	1404.24891	0.028583045	1404.44793	0.0287424052
11	1719.32812	-0.026204648	1719.52728	-0.026335621
12	2066.38015	0.024105531	2066.57942	0.0242150583
13	2445.40901	-0.022256698	2445.60837	-0.022349632
14	2856.41786	0.020625900	2856.61730	0.020705735
15	3299.40922	0.017900974	3299.60872	-0.019252188
16	3774.38515	-0.016757395	3774.58470	0.017961713
17	4281.34733	0.015732851	4281.54692	-0.016811051
18	4820.29718	-0.014811114	4820.49681	0.015780592
19	5391.23591	0.013978533	5391.43557	-0.014853864
20	5994.16453	-0.013223604	5994.36422	0.014017033

Tabella 3.9: Autovalori per  $R_w = 0.25$  come funzione di  $S_1^2$  (seconda parte)

N	$S_1^2 = -1$		$S_1^2 = -10$	
	$\lambda_i$	$A_i$	$\lambda_i$	$A_i$
1	5.5089197	2.759630691	18.105621	-0.210709426
2	34.840864	-0.233477416	51.060880	0.239524996
3	94.952734	-0.000344757	112.22680	-0.186606426
4	186.65197	0.039966411	204.28750	0.140478981
5	310.14046	-0.045914536	327.92958	-0.108711645
6	465.49900	0.044088658	483.36472	0.086929526
7	652.76843	-0.040471859	670.67695	-0.071501263
8	871.97244	0.036701662	889.90695	0.060178933
9	1123.1261	-0.033237687	1141.07739	-0.051602509
10	1406.2396	0.030180445	1424.20227	0.044928315
11	1721.3202	-0.027517258	1739.29092	-0.039614647
12	2068.3733	0.025203043	2086.34989	0.035301634
13	2447.4030	-0.023187811	2465.38400	-0.031742641
14	2858.4126	0.021425668	2876.39690	0.028763893
15	3301.4045	-0.019877168	3319.39144	-0.026239908
16	3776.3809	0.018509303	3794.36991	0.024078121
17	4283.3435	-0.017294744	4301.33416	-0.022208911
18	4822.2937	0.01621092	4840.28571	0.020579028
19	5393.2327	-0.01523917	5411.22584	-0.019147116
20	5996.1616	0.014364011	6014.15564	0.017880623

Tabella 3.10: Autovalori per  $R_w = 25$  come funzione di  $S_1^2$  (prima parte)

N	$S_1^2 = 0$		$S_1^2 = -0.1$	
	$\lambda_i$	$A_i$	$\lambda_i$	$A_i$
1	0.079272	252.1198025	0.277871	71.49475599
2	25.78138	-0.792466616	25.98148	-0.782986594
3	83.97767	0.251012897	84.17772	0.248603567
4	174.2937	-0.122590849	174.4938	-0.121432775
5	296.6726	0.07253569	296.8726	0.071844604
6	451.0915743	-0.047898829	451.2915918	-0.047437362
7	637.5389374	0.03397088	637.7389511	0.033640239
8	856.0076526	-0.025334356	856.2076638	-0.025085588
9	1106.4931376	0.019611863	1106.6931470	0.019417818
10	1388.9922130	-0.015625938	1389.1922209	-0.015470307
11	1703.5025701	0.012739068	1703.7025770	0.012611452
12	2050.0224725	-0.010581589	2050.2224785	-0.010475038
13	2428.5505768	0.008927136	2428.7505821	0.008836826
14	2839.0858197	-0.007630798	2839.2858244	-0.007553276
15	3281.6273431	0.006596313	3281.8273473	0.006529039
16	3756.1744434	-0.005757708	3756.3744472	-0.005698776
17	4262.7265355	0.005068545	4262.9265390	0.005016493
18	4801.2831269	-0.004495368	4801.4831301	-0.004449057
19	5371.8437988	0.004013579	5372.0438018	0.003972109
20	5974.4081915	-0.00360477	5974.6081942	-0.003567418



Tabella 3.11: Autovalori per  $R_w = 25$  come funzione di  $S_1^2$  (seconda parte)

N	$S_1^2 = -1$		$S_1^2 = -10$	
	$\lambda_i$	$A_i$	$\lambda_i$	$A_i$
1	2.029258	9.203680541	16.88041	-0.003708674
2	27.79091	-0.698193217	46.04580	0.003956888
3	85.98283	0.22670612	104.35838	-0.002704269
4	176.2970	-0.110914984	194.5830	0.001858473
5	298.6749	0.065577159	316.8900	-0.001359115
6	453.0933418	-0.043257367	471.2603	0.001047336
7	639.5403308	0.030648091	657.6739142	-0.000839561
8	858.0087868	-0.022835996	876.1184980	0.000693399
9	1108.4940835	0.017664092	1126.5861086	-0.00058606
10	1390.9930170	-0.014064419	1409.0715509	0.000504476
11	1705.5032642	0.01145908	1723.5712493	-0.000440719
12	2052.0230793	-0.009513189	2070.0826421	0.00038974
13	2430.5511131	0.008021809	2448.6038305	-0.000348193
14	2841.0862979	-0.006853822	2859.1333662	0.00031378
15	3283.6277729	0.005922179	3301.6701169	-0.00028488
16	3758.1748323	-0.005167253	3776.2131797	0.000260316
17	4264.7268896	0.004547091	4282.7618212	-0.000239219
18	4803.2834510	-0.004031481	4821.3154370	0.000220933
19	5373.8440968	0.003598221	5391.8735220	-0.000204951
20	5976.4084667	-0.003230701	5994.4356495	0.000190883

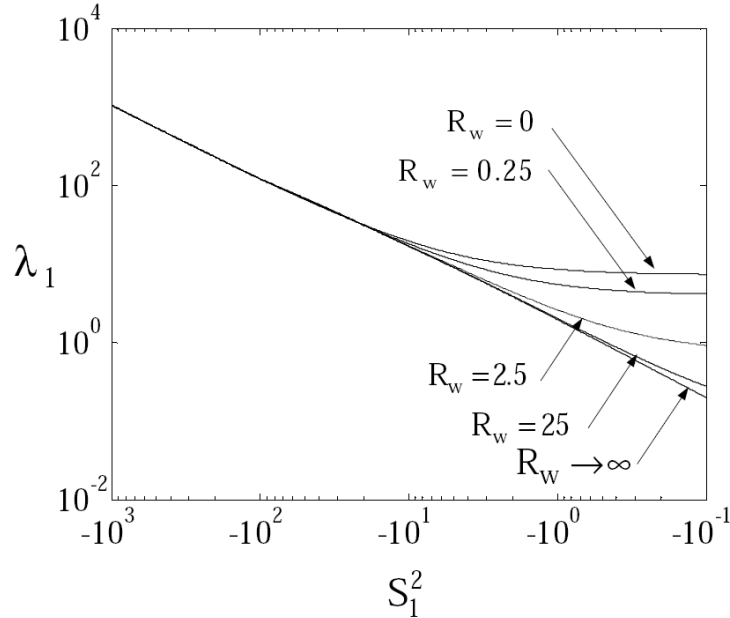


Figura 3.5: Primi autovalori come funzione di  $S_1^2$

poiché  $\lambda_1$  cresce al calare di  $S_1^2$ , l'estensione della regione di ingresso termico cala al calare di  $S_1^2$ .

L'influenza di  $S_1^2$  sulla distribuzione adimensionale di temperatura è rappresentata in Fig.3.6 per la regione di completo sviluppo. Per valori fissati di  $R_w$  e  $S_0$ , la distribuzione adimensionale di temperatura diventa più piatta al calare di  $S_1^2$ . Inoltre, l'effetto è più evidente per valori alti di  $R_w$ , dato che l'effetto del riscaldamento interno decresce al decrescere di  $S_1^2$ , la distribuzione di temperatura nella regione di completo sviluppo tende a zero al calare di  $S_1^2$ .

In Fig.3.7 è mostrata l'influenza del parametro  $S_1^2$  sulle distribuzioni di temperatura adimensionale di mescolamento e del flusso di calore alla parete. Tutti i casi rappresentati si riferiscono a  $S_0 = -10$ . Nell'applicazione pratica, un valore negativo di  $S_0$  è il caso più frequente (questo perché  $T'_0 > T'_a$ ). In Fig.3.7 non è stata rappresentata la distribuzione di  $T_w$ . Questa

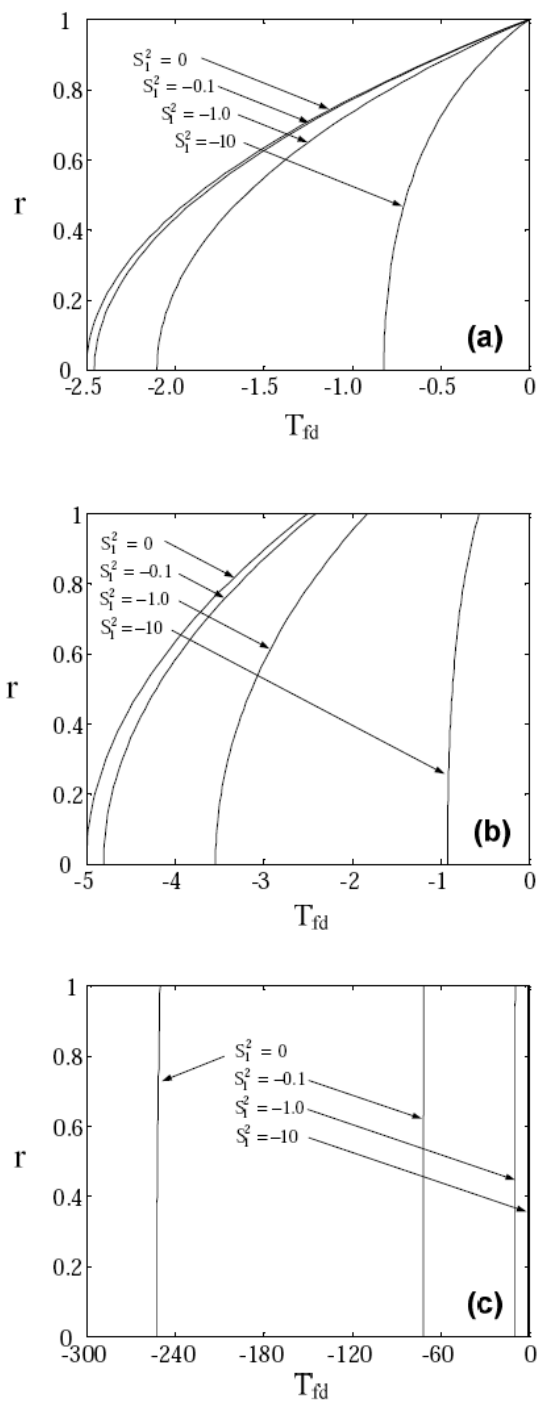


Figura 3.6: Influenza di  $S_1^2$  sulla distribuzione adimensionale di temperatura per la regione di completo sviluppo,  $S_0 = -10$ : (a):  $R_W = 0$  ; (b):  $R_W = 0.25$ ; (c):  $R_W = 25$

distribuzione può essere ottenuta sulla base della distribuzione di  $q_w$ , tramite l' Eq. (3.8). Dalla Figura 3.7, si può osservare che le distribuzioni di  $T_b$  e  $q_w$  sono notevolmente influenzate dal parametro  $S_1^2$ , il cui effetto è più marcato nella regione di completo sviluppo. In questa regione, come già osservato nel Capitolo 2 per il caso con generazione costante, la distribuzione diventa costante con  $x^*$ . Per valori fissati di  $R_w$  e  $S_0$ , l'ordine di grandezza della temperatura adimensionale di mescolamento e di parete e del flusso di calore alla parete cresce al crescere di  $S_1^2$  fino a 0.

In Fig.3.8 è mostrata l'influenza di  $S_1^2$  sul numero di Nusselt completamente sviluppato. Dato che nell'Eq.(3.35) la prima radice del denominatore corrisponde ad un valore positivo del parametro  $S_1^2$  ( $S_1^2 \approx 29.61$ ), la distribuzione  $Nu_{fd}(S_1^2)$  non diventa mai singolare nell'intervallo di analisi. Si può osservare che  $Nu_{fd}$  al crescere di  $S_1^2$  fino a 0. Questo perché, quando cresce  $S_1^2$ , l'incremento di  $q_w, fd$  è meno marcato rispetto a quello della differenza  $(T_w - T_b)_{fd}$ .

### 3.3 Considerazioni conclusive

Convezione laminare forzata stabile in condotti circolari con generazione di calore inversamente proporzionale alla temperatura mostra alcuni aspetti di interesse:

1. Nella regione di ingresso termico, la distribuzione di temperatura dipende principalmente da  $S_0$  e  $R_w$ . L'effetto del parametro  $S_1^2$  è più marcato nella regione di completo sviluppo.
2. Come già osservato per il caso con generazione costante, nella regione di completo sviluppo, i valori di  $T_w$ ,  $T_b$  e  $q_w''$  sono costanti rispetto alla coordinata assiale. Nell'applicazione pratica, questo significa che

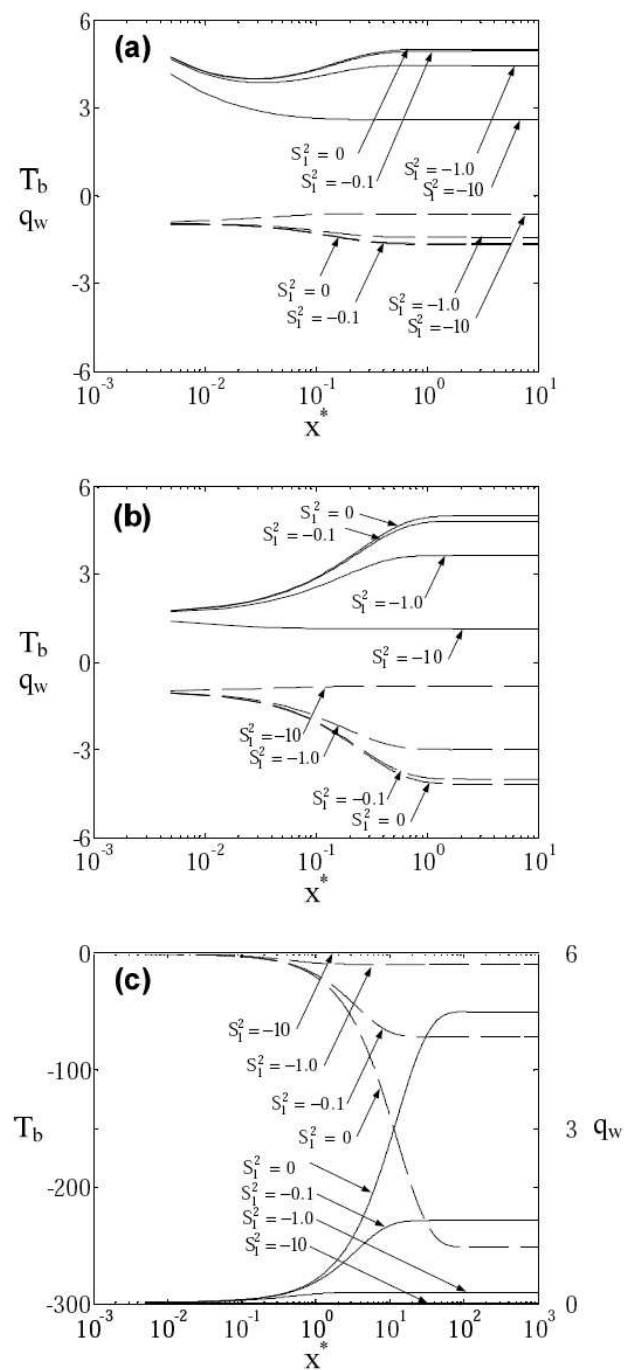


Figura 3.7: Influenza di  $S_1^2$  sulle distribuzioni adimensionali di  $T_b$  e  $q_w$ ,  $S_0 = -10$ : (a):  $R_W = 0$ ; (b):  $R_W = 0.25$ ; (c):  $R_W = 25$ ; (“- -”:  $T_b$ ; “—”:  $q_w$ )

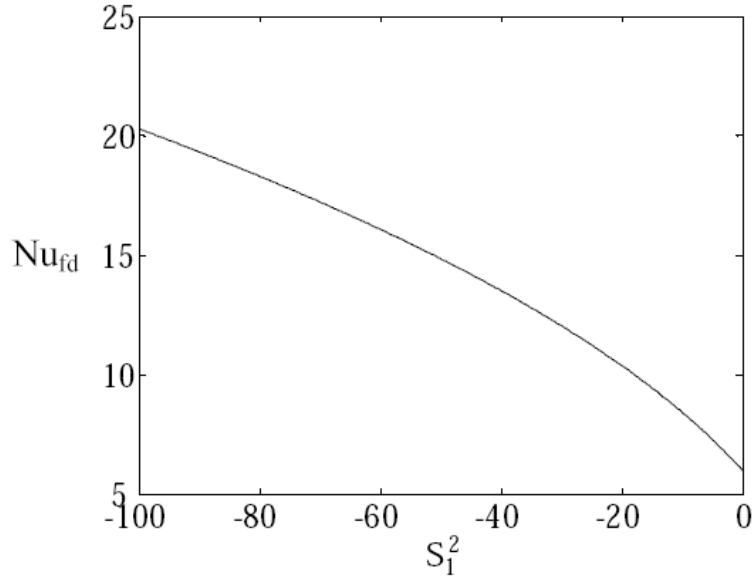


Figura 3.8: Variazione del numero di Nusselt completamente sviluppato con  $S_1^2$

in questa regione tutto il calore generato viene trasferito all'ambiente senza riscaldare ulteriormente il fluido.

3. Il numero di Nusselt pertinente alla regione di completo sviluppo dipende solo da  $S_1^2$  e può essere calcolato mediante un'esatta equazione analitica.
4. Quando  $S_1^2 \geq 0$  (generazione interna di calore costante), le condizioni di completo sviluppo corrispondenti al caso adiabatico non sono mai raggiunte per  $R_w \rightarrow \infty$ . Viceversa, per  $S_1^2 < 0$  (generazione di calore inversamente proporzionale alla temperatura), la distribuzione adimensionale di temperatura corrispondente al caso adiabatico è sempre raggiunta per  $R_w \rightarrow \infty$ .
5. La generazione di calore inversamente proporzionale alla temperatura,

che per esempio è pertinente alle applicazioni pratiche riguardo al riscaldamento ohmico di cibi liquidi in un riscaldatore collineare, ha un effetto stabilizzante sulla distribuzione di temperatura.

6. Valori positivi del parametro  $S_1^2$  vanno limitati ad un valore di soglia che è funzione di  $R_W$ , altrimenti la distribuzione di temperatura nello scambiatore diventa catastrofica.

### 3.4 Appendice

In questa Appendice si dimostra che

$$J_0(S_1) - 2R_W S_1 J_1(S_1) = 0 \quad (3.44)$$

non ha radici per  $S_1^2 < 0$ . Per  $S_1^2 < 0$ , l'argomento delle funzioni di Bessel in Equazione (3.44) è puramente immaginario. Indicando con  $I_\alpha(x)$  la funzione di Bessel modificata del primo tipo di ordine  $\alpha$ , l'Equazione (3.44) può essere riscritta come:

$$I_0(|S_1|) + 2R_W |S_1| I_1(|S_1|) = 0 \quad (3.45)$$

Dal momento che  $|S_1|$  è una quantità reale positiva, le funzioni  $I_0(|S_1|)$  e  $I_1(|S_1|)$  sono reali positive [27]. Quindi le Equazioni (3.44) e (3.45) non hanno radici.

## Capitolo 4

# Convezione laminare in condotti cilindrici con condizioni al contorno del terzo tipo e generazione interna di calore variabile e conduzione assiale di calore nel fluido

La conduzione assiale di calore, sia nel fluido che lungo le pareti del condotto, costituisce un effetto di preriscaldamento del fluido nella regione di ingresso termico. I risultati di scambio termico, pertinenti sia alla regione di ingresso termico, che a quella di completo sviluppo, possono essere dunque fortemente influenzati dalla presenza della conduzione assiale di calore.

L'effetto della conduzione assiale di calore lungo le pareti del condotto è particolarmente evidente per pareti molto conduttive e fluido poco conduttivi



[34]. Questo non è il caso del riscaldamento ohmico in condotti, dal momento che in queste applicazioni le pareti del condotto sono costituite da materiale isolante dal punto di vista elettrico e termico.

E' inoltre comunemente accettato in letteratura [11] che l'effetto della conduzione assiale di calore nel fluido sia significativo quando  $Pe < 100$ . Tuttavia, tale considerazione è stata desunta in studi pertinenti alla convezione laminare in condotti in assenza di fenomeni generativi [11].

Nel presente Capitolo viene studiata l'influenza della conduzione assiale di calore nel fluido in condotti con generazione interna di calore. Il caso di interesse consiste in un condotto cilindrico in regime di moto laminare con condizioni al contorno del terzo tipo, generazione di calore variabile linearmente con la temperatura locale del fluido e conduzione assiale di calore nel fluido. L'analisi del presente Capitolo costituisce dunque l'estensione dell'analisi del Capitolo 3, al caso con conduzione assiale di calore.

## 4.1 Modello matematico e strategia risolutiva

Il caso di interesse, rappresentato schematicamente in Fig. 4.1, consiste in un condotto cilindrico attraversato da un fluido newtoniano in regime di moto laminare stazionario con generazione interna di calore variabile linearmente con la temperatura locale del fluido. Viene inoltre incluso l'effetto della conduzione assiale. Il profilo di velocità è quello completamente sviluppato, mentre quello di temperatura è uniforme con valore pari a  $T'_0$ . Si prendono infine in considerazione i casi nei quali per  $x' \rightarrow \infty$ , la temperatura del fluido assume un valore finito.

Il problema risulta essere descritto matematicamente come segue:

Conservazione dell'energia:

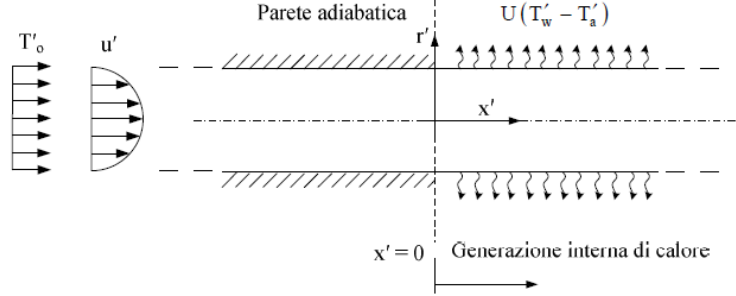


Figura 4.1: Rappresentazione schematica del caso di analisi

$$2W\rho c_p \left(1 - \left(\frac{r'}{D/2}\right)^2\right) \frac{\partial T'}{\partial x'} = k \left[ \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left( r' \frac{\partial T'}{\partial r'} \right) + \frac{\partial^2 T'}{\partial x'^2} \right] +$$

$$+ C \cdot q_0''' (1 + \beta'_0 (T' - T'_0)), \begin{cases} C = 0 & \text{per } -\infty < x' < 0 \\ C = 1 & \text{per } 0 < x' < \infty \end{cases} \quad (4.1)$$

Condizioni al contorno:

$$T'(x' \rightarrow -\infty, r') = T'_0 \quad \text{per } 0 < r' < 1 \quad (4.2)$$

$$\left. \frac{\partial T'}{\partial r'} \right|_{r'=0} = 0 \quad \text{per } -\infty < x' < +\infty \quad (4.3)$$

$$-k \left. \frac{\partial T'}{\partial r'} \right|_{r'=D/2} = 0 \quad \text{per } -\infty < x' < 0 \quad (4.4)$$

$$-k \left. \frac{\partial T'}{\partial r'} \right|_{r'=D/2} = U(T'_W - T'_a) \quad \text{per } 0 < x' < +\infty \quad (4.5)$$

Il problema è reso adimensionale con le seguenti regole:

$$x^* = x' / (PeD/2)$$

$$r = r' / (D/2)$$

$$T = (T' - T'_a) / (T'_a - T'_0)$$

Le Eq. (4.1) e le condizioni al contorno (4.2),(4.3),(4.4),(4.5) diventano:

$$(1 - r^2) \frac{\partial T}{\partial x^*} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{Pe^2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^{*2}} + C(S_1^2 T + S_0), \begin{cases} C = 0 & \text{per } -\infty < x' < 0 \\ C = 1 & \text{per } 0 < x' < \infty \end{cases} \quad (4.6)$$

$$T(x^* \rightarrow -\infty, r') = 1 \quad (4.7)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad \text{per } 0 < x^* < +\infty \quad (4.8)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=1} = 0 \quad \text{per } -\infty < x^* < 0 \quad (4.9)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=1} + \frac{1}{2R_W} T(x^*, r = 1) = 0 \quad \text{per } 0 < x^* < +\infty \quad (4.10)$$

I raggruppamenti adimensionali del problema sono dati da:

$$R_W = \frac{k}{UD}$$

$$S_0 = \frac{q_0''' (1 + \beta_0' (T_a' - T_0')) D^2}{4k(T_a' - T_0')}$$

$$S_1^2 = \frac{q_0''' \beta_0' D^2}{4k}$$

$$Pe = \frac{\rho c_p W D}{k}$$

$R_W$  è la resistenza adimensionale dell'ambiente;  $S_0$  e  $S_1^2$

discendono dall'adimensionalizzazione del termine generativo. La distribuzione di temperatura adimensionale viene espressa come segue:

$$T(x^*, r) = \begin{cases} T_{up}(x^*, r) & \text{per } x^* < 0 \\ T_d(x^*, r) & \text{per } x^* > 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

$T_{up}(x^*, r)$  è soluzione di:

$$(1 - r^2) \frac{\partial T_{up}}{\partial x^*} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T_{up}}{\partial r} \right) + \frac{1}{Pe^2} \frac{\partial^2 T_{up}}{\partial x^{*2}} \quad (4.12)$$

$$T_{up}(x^* \rightarrow -\infty, r') = 1 \quad (4.13)$$

$$\left. \frac{\partial T_{up}}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad (4.14)$$

$$\left. \frac{\partial T_{up}}{\partial r} \right|_{r=1} = 0 \quad (4.15)$$

$T_d(x^*, r)$  è soluzione di:

$$(1 - r^2) \frac{\partial T_d}{\partial x^*} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T_d}{\partial r} \right) + \frac{1}{Pe^2} \frac{\partial^2 T_d}{\partial x^{*2}} + S_1^2 T_d + S_0 \quad (4.16)$$

$$T_d(x^* \rightarrow \infty, r) < \infty \quad (4.17)$$

$$\left. \frac{\partial T_d}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad (4.18)$$

$$\left. \frac{\partial T_d}{\partial r} \right|_{r=1} + \frac{1}{2R_W} T_d|_{r=1} = 0 \quad (4.19)$$

Alle Eq.(4.16), (4.17), (4.18), (4.19), vanno aggiunte le condizioni di continuità del valore locale della temperatura e del flusso termico per  $x^* = 0$ , ossia:

$$T_{up}(x^* = 0, r) = T_d(x^* = 0, r) \quad (4.20)$$

$$\left. \frac{\partial T_{up}}{\partial x^*} \right|_{x^*=0} = \left. \frac{\partial T_d}{\partial x^*} \right|_{x^*=0} \quad (4.21)$$

Utilizzando il metodo di separazioni delle variabili, la funzione  $T_{up}(x^*, r)$  può essere espressa come segue:

$$T_{up}(x^*, r) = -1 + \sum_{i=1}^{\infty} B_i g_i e^{\beta_i x^*} \quad (4.22)$$

ove le funzioni  $g_i$  sono soluzione di:

$$\frac{d^2 g_i}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dg_i}{dr} + \frac{\beta_i^2}{Pe^2} - (1 - r^2)\beta_i g_i = 0 \quad (4.23)$$

con condizioni al contorno date da:

$$\left. \frac{dg_i}{dr} \right|_{r=0} = 0 \quad (4.24)$$

$$\left. \frac{dg_i}{dr} \right|_{r=1} = 0 \quad (4.25)$$

Indicando ora con:

$$\eta_i = (\beta_i)^{1/2}$$

$$a_i = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{I\eta_i}{2} - \frac{(I\eta_i)^3}{2Pe^2} \right)$$

una generica soluzione delle Eq. (4.23), (4.24), (4.25), è data da quella funzione di Poiseuille limitata lungo l'asse del condotto,  $pe(r, \eta_i)$  in modo che la condizione al contorno di assialsimmetria, (4.24), sia sempre soddisfatta [23]:

$$g_i(r) = pe(r, \eta_i) = e^{\left[-\frac{I\eta_i}{2}r^2\right]} {}_1F_1 \left[ a_i, 1, I\eta_i r^2 \right] \quad (4.26)$$

I valori ammissibili della costante di separazione  $\beta_i$  sono le radici dell'equazione trascendente data dalla Eq. (4.25). La ricerca di queste radici può essere facilmente condotta per mezzo di una procedura numerica. È facile dimostrare che le funzioni  $g_i(r)$ , assieme alla condizione al contorno del secondo tipo data dalla Eq. (4.25), garantiscono:

$$\int_{r=0}^{r=1} \left[ \frac{\beta_n + \beta_m}{Pe^2} - (1 - r^2) \right] g_m(r) g_n(r) r dr \begin{cases} = 0 & \text{se } n \neq m \\ \neq 0 & \text{se } n = m \end{cases} \quad (4.27)$$

La funzione  $T_d(x^*, r)$  può essere espressa come somma di due funzioni  $T_1(r)$  e  $T_2(x^*, r)$ :

$$T_d(x^*, r) = T_1(r) + T_2(x^*, r) \quad (4.28)$$

Dopo aver sostituito Eq. (4.28) nelle Eq. (4.16), (4.17), (4.18), (4.19), si ottiene che la funzione  $T_1(r)$  deve essere la soluzione di:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT_1}{dr} \right) + S_1^2 T_1 + S_0 = 0 \quad (4.29)$$

$$\left. \frac{dT_1}{dr} \right|_{r=0} = 0 \quad (4.30)$$

$$\left. \frac{dT_1}{dr} \right|_{r=1} + \frac{1}{2R_W} T_1|_{r=1} = 0 \quad (4.31)$$

La soluzione delle Eq. (4.29), (4.30), (4.31), è data da:

$$T_1(r) = \frac{S_0}{S_1^2} \frac{J_0(S_1 r)}{J_0(S_1) - 2R_W S_1 J_1(S_1)} - \frac{S_0}{S_1^2} \quad (4.32)$$

La funzione  $T_2(x^*, r)$ , utilizzando il metodo di separazione delle variabili, può essere espressa come segue:

$$T_2(x^*, r) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i e^{-\lambda_i x^*} f_i(r) \quad (4.33)$$

Le funzioni  $f_i(r)$  sono soluzione di:

$$\frac{d^2 f_i}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df_i}{dr} + \frac{\lambda_i^2}{Pe^2} f_i + S_1^2 f_i + (1 - r^2) \lambda_i f_i = 0 \quad (4.34)$$

con condizioni al contorno date da:

$$\left. \frac{df_i}{dr} \right|_{r=0} = 0 \quad (4.35)$$

$$\left. \frac{df_i}{dr} \right|_{r=1} + \frac{1}{2R_W} f_i(1) = 0 \quad (4.36)$$

Indicando ora con:

$$\mu_i = (\lambda_i)^{1/2}$$

$$\alpha_i = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\mu_i}{2} - \frac{\mu_i^3}{2Pe^2} - \frac{S_i^2}{2\mu_i} \right)$$

una generica soluzione delle Eq. (4.34),(4.35) è data da quella funzione di Poiseuille limitata lungo l'asse del condotto,  $pe(r, \mu_i)$  in modo che la condizione al contorno di assialsimmetria, Eq. (4.34), sia sempre soddisfatta [23]:

$$f_i(r) = pe(r, \mu_i) = e^{[-\frac{\mu_i}{2}r^2]} {}_1F_1 [\alpha_i, 1, \mu_i r^2] \quad (4.37)$$

È facile dimostrare che le funzioni  $f_i(r)$ , con la condizione al contorno del terzo tipo, Eq. (4.36), garantiscono:

$$\int_{r=0}^{r=1} \left[ \frac{\lambda_n + \lambda_m}{Pe^2} + (1 - r^2) \right] f_m(r) f_n(r) r dr \begin{cases} = 0 & \text{se } n \neq m \\ \neq 0 & \text{se } n = m \end{cases} \quad (4.38)$$

Dalle Eq. (4.28), (4.32), (4.33), si ottiene pertanto:

$$T_d(x^*, r) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i e^{-\lambda_i x^*} f_i(r) + \frac{S_0}{S_1^2} \frac{J_0(S_1 r)}{J_0(S_1) - 2R_W S_1 J_1(S_1)} - \frac{S_0}{S_1^2} \quad (4.39)$$

Dalle condizioni di congruenza date dalle Eq. (4.20) e (4.21), e dalle Eq. (4.22) e (4.39) si ottiene dunque:

$$-1 + \sum_{i=1}^{\infty} B_i g_i = \sum_{i=1}^{\infty} A_i f_i + \frac{S_0}{S_1^2} \frac{J_0(S_1 r)}{J_0(S_1) - 2R_W S_1 J_1(S_1)} - \frac{S_0}{S_1^2} \quad (4.40)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i B_i g_i = - \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i A_i f_i \quad (4.41)$$

Seguendo la procedura proposta da Lahjmi e Oubarra [33], si ottiene:

$$A_m = \frac{\chi_m}{\delta_m} + \frac{1}{\delta_m} \sum_{i=1}^{\infty} F_{m,i} B_i \quad (4.42)$$

$$B_m = \frac{\phi_m}{\gamma_m} - \frac{1}{\gamma_m} \sum_{i=1}^{\infty} A_i F_{i,m} \quad (4.43)$$

ove:

$$\chi_m = \int_{r=0}^{r=1} \xi(r) \left[ \frac{\lambda_m}{Pe^2} + (1 - r^2) \right] f_m(r) r dr \quad (4.44)$$

$$\delta_m = \int_{r=0}^{r=1} \left[ \frac{2\lambda_m}{Pe^2} + (1 - r^2) \right] f_m^2(r) r dr \quad (4.45)$$

$$\phi_m = - \int_{r=0}^{r=1} \xi(r) \left[ \frac{\beta_m}{Pe^2} - (1 - r^2) \right] g_m(r) r dr \quad (4.46)$$

$$\gamma_m = \int_{r=0}^{r=1} \left[ \frac{2\lambda_m}{Pe^2} - (1 - r^2) \right] g_m^2(r) r dr \quad (4.47)$$

$$\xi(r) = -1 - \frac{S_0}{S_1^2} \frac{J_0(S_1 r)}{J_0(S_1) - 2R_W S_1 J_1(S_1)} + \frac{S_0}{S_1^2} \quad (4.48)$$

$$F_{m,i} = \int_{r=0}^{r=1} \left[ \frac{\lambda_m}{Pe^2} - \frac{\beta_i}{Pe^2} + (1 - r^2) \right] f_m(r) g_i(r) r dr \quad (4.49)$$



La temperatura adimensionale di mescolamento, il flusso termico scambiato alla parete (positivo se entrante nel sistema) e il numero di Nusselt locale sono dati da:

$$T_b(x^*) = 4 \int_{r=0}^{r=1} (1 - r^2) T r dr \quad (4.50)$$

$$q_w(x^*) = \frac{q_W''}{2k(T'_a - T'_0)/D} = \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=1} \quad (4.51)$$

$$Nu_x = 2 \frac{\partial T / \partial r|_{r=1}}{T_W - T_b} \quad (4.52)$$

Nella regione per  $x^* > 0$ , sulla base delle Eq. (4.11), (4.32), (4.33), le Eq. (4.50), e (4.51) divengono:

$$T_b(x^*) = -4 \sum_{i=1}^{\infty} A_i e^{-\lambda_i x^*} \left[ \frac{1}{\lambda_i} \frac{df_i}{dr} \Big|_{r=1} + \left( \frac{S_1^2}{\lambda_i} + \frac{\lambda_i}{Pe^2} \right) \int_{r=0}^{r=1} f_i(r) r dr \right] +$$

$$+ \frac{S_0}{S_1^2} \frac{J_0(S_1 r)}{J_0(S_1) - 2R_W S_1 J_1(S_1)} - \frac{8J_2(S_1)}{S_1^2} - \frac{S_0}{S_1^2} \quad (4.53)$$

$$q_w(x^*) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i e^{-\lambda_i x^*} \frac{df_i}{dr} \Big|_{r=1} - \frac{S_0}{S_1^2} \frac{S_1 J_1(S_1)}{J_0(S_1) - 2R_W S_1 J_1(S_1)} \quad (4.54)$$

Nel presente caso di analisi, le condizioni di completo sviluppo [11] sono ottenute per  $x^* \rightarrow +\infty$ . In questa regione, la distribuzione di temperatura adimensionale, Eq. (4.39), è indipendente da  $x^*$ . Calcolando il limite della Eq. (4.39) per  $x^* \rightarrow +\infty$ , si ottiene quanto segue:

$$T_{fd}(x^*, r) = \frac{S_0}{S_1^2} \frac{J_0(S_1 r)}{J_0(S_1) - 2R_W S_1 J_1(S_1)} - \frac{S_0}{S_1^2} \quad (4.55)$$

Tabella 4.1: Radici upstream  $\beta_i$ 

N	$Pe = 0.01$	$Pe = 0.1$	$Pe = 1$	$Pe = 5$	$Pe = 10$	$Pe = 100$
1	$4.91 \cdot 10^{-5}$	0.386526	0.49742	11.19909	37.16548	-
2	0.038351	0.704903	4.187466	30.45471	90.53675	-
3	0.101768	1.020686	7.35923	44.76645	115.1823	-
4	0.164739	1.650403	13.66219	60.08493	142.4609	-
5	0.25907	1.964931	16.80811	75.61142	172.0216	-

Il numero di Nusselt corrispondente alla regione di completo sviluppo, dopo aver sostituito nell'Eq. (4.52), le Eq. (4.39), (4.53), (4.54), e avere operato il limite per  $x^* \rightarrow +\infty$ , diviene:

$$Nu_{fd} = 2 \frac{-S_1 J_1(S_1)}{J_0(S_1) - 8J_2(S_1)/S_1^2} \quad (4.56)$$

Dall'Eq. (4.56), si osserva che il numero di Nusselt corrispondente alla regione di completo sviluppo è funzione solo del parametri  $S_1^2$  ed è il medesimo di quello calcolato in assenza di conduzione assiale (v. Capitolo 2).

## 4.2 Risultati e discussione

Nella presente analisi vengono presentati e discussi i risultati per  $S_1^2 < 0$ . Questo è il caso del riscaldamento ohmico degli alimenti in riscaldatori collineari. E' facile dimostrare che, nella presente analisi, qualsiasi valore negativo di  $S_1^2$  è ammissibile.

Si osserva inoltre che quando  $Pe \geq 1$  il valore di  $\lambda_1$  è indipendente dal valore assunto dal numero di Péclet stesso. Questo è confermato anche dai risultati riassunti nelle Tabelle 4.1 e 4.2, che mostrano i primi cinque autovalori sia della regione upstream che downstream.

Tabella 4.2: Radici downstream  $\lambda_i$  ( $R_W = 0.25$ ,  $S_1^2 = -0.1$ )

N	$Pe = 0.01$	$Pe = 0.1$	$Pe = 1$	$Pe = 5$	$Pe = 10$	$Pe = 100$
1	0.016273	0.159956	1.346296	2.826476	3.91842	4.149573
2	0.042995	0.427209	4.011608	18.52	23.18798	32.97642
3	0.072921	0.726313	6.982701	22.83343	48.75014	91.60423
4	0.103674	1.033801	10.04979	37.93711	106.4653	178.6633
5	0.134723	1.344278	13.15085	47.08332	136.6865	291.6957

Quando  $Pe < +\infty$ , l'Eq. (4.25) ha più di una radice. Il calcolo delle costanti  $A_m$  e  $B_m$ , Eq. (4.42) e (4.43), ai fini presente analisi non verrà svolto.

Dal momento che l'estensione della regione di ingresso termico è strettamente legata al primo autovalore, è stata concentrata l'attenzione sulla prima radice della Eq. (4.36) in funzione di  $R_W$ ,  $S_1^2$  e  $Pe$ .

In Fig. 4.2 è rappresentato l'andamento di  $\lambda_1$  con  $Pe$  ( $S_1^2 = -0.1$ ). Si osserva che, quando  $Pe$  decresce,  $\lambda_1$  decresce. Ne deriva che l'estensione della regione di ingresso cresce al calare di  $Pe$ .

Dalle Eq. (4.53), (4.54) si osserva che per  $x^* \rightarrow +\infty$ , le distribuzioni  $T_{b,fd}$  e  $q_{W,fd}$ , per fissati valori di  $R_W$ ,  $S_0$  e  $S_1^2$ , sono costanti e sono le medesime del corrispondente del caso senza conduzione assiale di calore (vedi Capitoli 2 e 3). Nelle applicazioni pratiche ciò implica che, nella regione di completo sviluppo, tutta la potenza termica generata è ceduta all'ambiente senza riscaldare ulteriormente il fluido.

A titolo di esempio, in Fig. 4.3 viene rappresentata l'influenza del numero di Péclet sulle distribuzioni adimensionali della temperatura di mescolamento e del flusso termico per fissati valori di  $R_W, S_0$  e  $S_1^2$  ( $R_W = 0.25$ ,  $S_0 = -10$ ,  $S_1^2 = -0.1$ ). Dal momento che, come già dimostrato nella trattazione

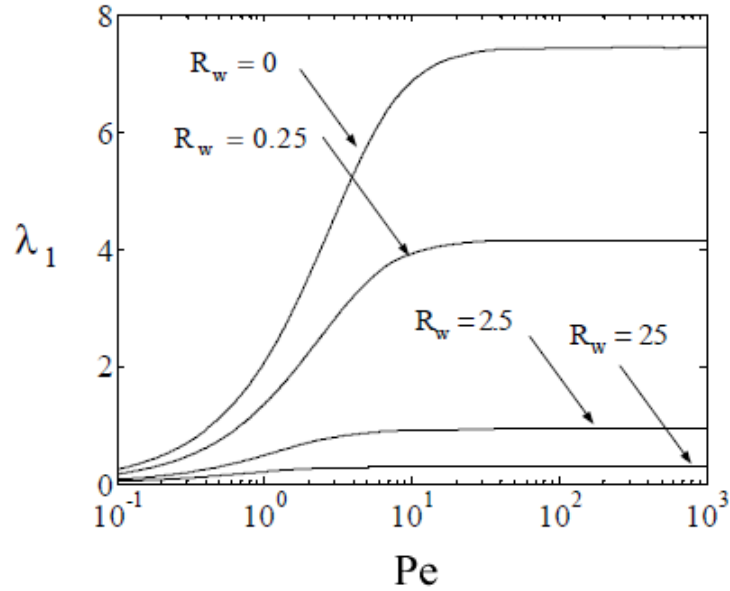


Figura 4.2: Andamento di  $\lambda_1$  con  $Pe$  ( $S_1^2 = -0.1$ )

matematica del presente Capitolo, la condizione di completo sviluppo non è influenzata dal numero di Péclet, tutte le curve convergono allo stesso asintoto.

Il numero di Péclet influenza dunque solo l'estensione della regione di ingresso termico, che cresce quando  $Pe$  cala. Questo è in accordo con quanto già osservato nello studio della convezione forzata in condotti in assenza di fenomeni generativi [11]. Quando  $Pe$  cala, si osserva inoltre che il riscaldamento del fluido è più graduale. In Figura 4.3 viene sinteticamente mostrata l'influenza del numero di Péclet sulle distribuzioni assiali di  $T_b$  e  $q_w$  per  $0.01 \leq Pe < \infty$ . Si osserva che la conduzione assiale di calore è significativa per  $Pe < 100$ . Quando  $Pe > 100$ , i risultati che si ottengono dalla soluzione del modello matematico che contempla la conduzione assiale nel fluido, sono i medesimi di quelli ottenuti in assenza di conduzione assiale. L'influenza del numero di Péclet è dunque significativa quando  $Pe < 100$ .

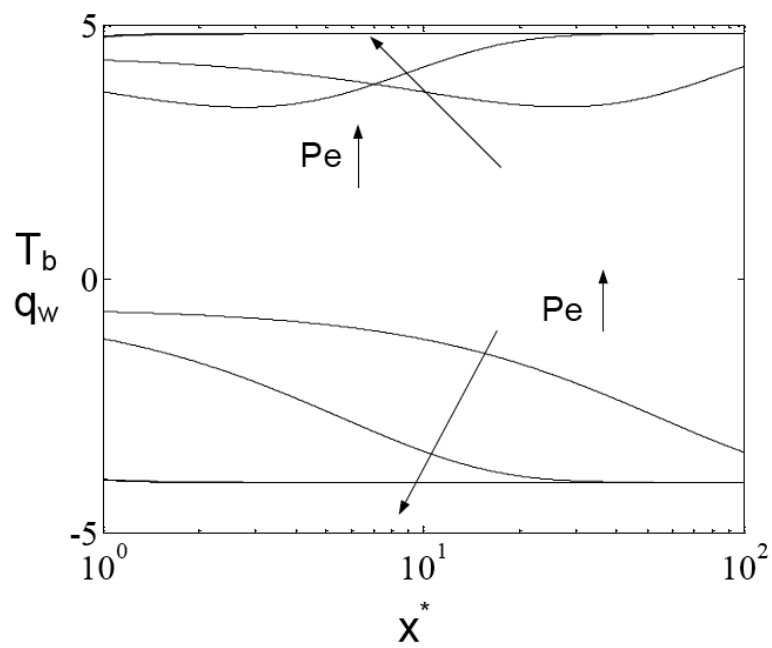


Figura 4.3: Distribuzione adimensionale della temperatura di mescolamento e del flusso di calore alla parete al variare del numero di Péclet (---:  $T_b$ ; -:  $q_w$ );  $R_W = 0.25$ ;  $S_0 = -10$ ;  $S_1^2 = -0.1$ ,  $Pe = 0.01, 0.1, 10, 100, \infty$ ).

Anche questo risultato è in accordo con quanto già osservato nello studio della convezione forzata in condotti in assenza di fenomeni generativi [11].

### 4.3 Considerazioni conclusive

La convezione forzata laminare in condotti cilindrici con generazione interna di calore ha alcune interessanti caratteristiche:

- La conduzione assiale di calore non ha effetto nella regione di completo sviluppo. L'estensione della regione di ingresso termico cresce quando  $Pe$  cala.
- L'estensione della regione di completo sviluppo cresce in termini di  $x^*$  quando  $Pe$  cala.
- Quando  $Pe > 10$ ,  $\lambda_1$  diviene circa indipendente dal valore assunto dal numero di Péclet stesso. Si può pertanto affermare che l'effetto del numero di Péclet è significativo quando  $Pe < 100$ .



# Capitolo 5

## Analisi di uno scambiatore ohmico a geometria collineare

### 5.1 Introduzione

Questo capitolo tratta l'analisi termofluidodinamica di un riscaldatore ohmico collineare cilindrico in un flusso laminare per il trattamento di purea di albicocche. Le proprietà elettriche di questi cibi sono conosciute in dettaglio [30].

Tutte le altre proprietà del fluido, tranne la conduttività elettrica, sono considerate costanti. Il fluido è assunto essere omogeneo. Dato che la presenza di piccole particelle solide nel fluido ha un effetto trascurabile sul flusso [4], l'assunzione di fluido omogeneo è valida anche per le applicazioni di trattamento di liquidi con piccole particelle solide, come piccole parti di frutta in un liquido. La loro presenza diventa significativa per un alto volume di parti solide e quando la dimensione caratteristica delle particelle è dello stesso ordine di grandezza del tubo [4].

Sotto queste ipotesi, è possibile ottenere una soluzione analitica per il



campo termico [31], che porta al veloce calcolo della distribuzione di temperatura nel riscaldatore.

Le analisi dei campi elettrico e termico, è risolta tramite una procedura iterativa. In un passo, viene calcolato il campo elettrico per una distribuzione di temperatura nota, tramite un metodo numerico. Nel passo successivo, viene calcolato il campo termico utilizzando una soluzione analitica pertinente al flusso laminare forzato di un fluido omogeneo in un condotto circolare con la temperatura dipendente dalla generazione interna di calore e condizioni al contorno convettive [31], già dettagliata nel Capitolo 2.

## 5.2 Modello Matematico

### 5.2.1 Descrizione del sistema

La geometria di interesse è mostrata in Fig 5.1. Un fluido che scorre in un condotto di vetro circolare, elettricamente isolante, è riscaldato da due elettrodi posizionati alle estremità del condotto. I principali dati del dispositivo sono riassunti in Tabella 5.1. La lunghezza della sezione riscaldante è 2.5 m, il diametro interno è 0.05 m e quello esterno 0.06 m. Sulla parete esterna del condotto sono considerate condizioni al contorno convettive. La temperatura ambiente è stimata in  $T'_a = 20^\circ\text{C}$ . La temperatura di ingresso del fluido è  $T'_0 = 40^\circ\text{C}$ . Il fluido considerato è purea di albicocche.

La d.d.p. imposta agli elettrodi è  $\Delta V = 2304V$ . Questo valore è stato selezionato mediante la procedura descritta in Sezione 5.5.

Tabella 5.1: Dati principali dell'attrezzatura

Proprietà	valore
diametro interno	$D_i = 50 \text{ mm}$
diametro esterno	$D_e = 60 \text{ mm}$
lunghezza	$L = 2.5 \text{ m}$
temperatura di ingresso	$T'_0 = 40^\circ\text{C}$
vtaggio applicato	2304 V

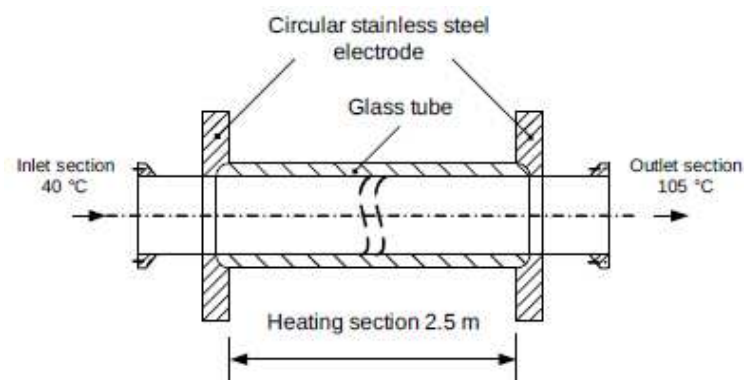


Figura 5.1: Geometria di interesse

### 5.2.2 Assunzioni di base

Al fine di analizzare un problema molto complesso come il riscaldamento ohmico collineare, sono necessarie diverse approssimazioni semplificative. La purea di frutta è considerata come fluido omogeneo. Tutte le proprietà termofisiche del fluido, all'infuori della conduttività elettrica, sono costanti. Dato che la frutta è principalmente composta di acqua, le sue proprietà termofisiche sono considerate le stesse dell'acqua. La conduttività elettrica del fluido è espressa come funzione lineare della temperatura, come segue:

$$\sigma = \sigma_0(1 + \kappa_0(T' - T'_0)) \quad (5.1)$$

dove  $\sigma_0$  e  $\beta_0$  sono date da [30]

$$\sigma_0 = 0.998S/m \quad (5.2)$$

$$\kappa_0 = 0.0151/K \quad (5.3)$$

In ogni sezione trasversale del condotto, la densità corrente è considerata costante. Nella soluzione del campo termico, la generazione interna di calore è espressa come funzione lineare (decrescente) della temperatura. Vengono trascurate la dissipazione viscosa, la conduttività termica assiale nel fluido e nella parete del condotto.

### 5.2.3 Equazioni di riferimento e strategia di soluzione

Per un condotto con pareti isolate elettricamente, assumendo una densità corrente costante in ogni sezione trasversale del condotto, il potenziale elettrico  $V$  è la soluzione della seguente equazione differenziale [31]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \sigma \frac{\partial}{\partial x} V \right) \quad (5.4)$$

con le condizioni al contorno:

$$V|_{x=0} = +\Delta V/2 \quad (5.5)$$

$$V|_{x=L} = +\Delta V/2 \quad (5.6)$$

Il campo termico, per un fluido omogeneo in flusso laminare in un condotto circolare ad alto numero di Péclet ( $Pe > 50$ ) è la soluzione della seguente equazione differenziale:

$$\rho c_p 2W \left( 1 - \left( \frac{r'}{D/2} \right)^2 \right) \frac{\partial T'}{\partial x'} = k_f \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left( r' \frac{\partial T'}{\partial r'} \right) + q_{gen}''' \quad (5.7)$$

con le condizioni al contorno:

$$T'(0, r') = -1 \quad \text{per } x' = 0 \quad (5.8)$$

$$\left. \frac{\partial T'}{\partial r'} \right|_{r'=0} = 0 \quad \text{per } 0 < x' < L \quad (5.9)$$

$$-k_f \left. \frac{\partial T'}{\partial r'} \right|_{r'=D/2} = K \left( T'|_{r'=D/2} - T_a' \right) \quad \text{per } 0 < x' < L \quad (5.10)$$

La generazione di calore interna locale è data da:

$$q_{gen}'''(x) = \sigma \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \quad (5.11)$$

Le equazioni (5.4) e (5.7) sono accoppiate per via delle equazioni (5.1) e (5.11). Quindi, al fine di risolvere il sistema di equazioni dato dalle Equazioni (5.4) - (5.11), è necessaria una procedura iterativa.

La presente procedura iterativa può essere descritta come segue:

1. Viene assunta una distribuzione assiale di temperatura.
2. Per una distribuzione assiale di temperatura nota, la conduttività elettrica è calcolata dall'Equazione (5.1). Quindi, l'equazione di conservazione del campo elettrico, Eq. (5.4), con le condizioni al contorno, Eq. (5.5) e (5.6), è risolta tramite una procedura numerica.

3. La distribuzione della generazione interna di calore è calcolata usando l'Eq. (5.11) e viene linearizzata come funzione della distribuzione assiale di temperatura, come segue:
4. L'equazione di conservazione dell'energia viene risolta per via analitica, mediante la soluzione mostrata nel Capitolo 2. Maggiori dettagli sono forniti nel paragrafo 5.3. Una nuova distribuzione assiale di temperatura viene calcolata, e la procedura viene ripetuta dal passo 2.

#### 5.2.4 Campo Termico

Mentre la soluzione numerica dell'Eq. (5.4) con le condizioni al contorno Eq. (5.5) e (5.6), è immediata, è necessario descrivere meglio alcuni dettagli della soluzione del campo termico.

Quando si esprime la generazione interna di calore come funzione lineare della temperatura, l'Eq. (5.7) diventa:

$$\rho c_p 2W \left( 1 - \left( \frac{r'}{D/2} \right)^2 \right) \frac{\partial T'}{\partial x'} = k_f \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left( r' \frac{\partial T'}{\partial r'} \right) + q_0''' (1 + \beta_0 (T' - T_0')) \quad (5.12)$$

L' Eq. (5.12) è completata dalle condizioni al contorno, Eq. (5.8) - (5.10).

La soluzione delle Equazioni (5.12), (5.8) - (5.10) è data da [31].

$$\frac{T'(x, r) - T'_a}{T'_a - T'_0} = \sum_{i=1}^{\infty} A_i e^{-\lambda_i x^*} f_i(\xi) + \left( \frac{S_0}{S_1^2} \frac{J_0(S_1 r)}{J_0(S_1) - 2R_W S_1 J_1(S_1)} - \frac{S_0}{S_1^2} \right) \quad (5.13)$$

dove:

$$R_W = \frac{k_f}{K D_i}$$

$$\begin{aligned}
S_0 &= \frac{(q_0'''(1 + \beta_0(T'_a - T'_0))D_i^2}{4k_f(T'_a - T'_0)} \\
S_1^2 &= \frac{q_0''' \beta_0 D_i^2}{4k_f} \\
x^* &= x'/(PeD_i/2) \\
\xi &= r/(D_i/2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_i &= \frac{\int_{\xi=0}^{\xi=1} \left(-1 + \frac{S_0}{S_1^2}\right) f_i(\xi) (1 - \xi^2) \xi d\xi}{\int_{\xi=0}^{\xi=1} f_i^2(\xi) (1 - \xi^2) \xi d\xi} + \\
&\quad - \frac{\int_{\xi=0}^{\xi=1} \frac{S_0/S_1^2 J_0(S_1 \xi)}{J_0(S_1) - 2R_W S_1 J_1(S_1)} f_i(\xi) (1 - \xi^2) \xi d\xi}{\int_{\xi=0}^{\xi=1} f_i^2(\xi) (1 - \xi^2) \xi d\xi} \quad (5.14)
\end{aligned}$$

$$q_{gen}''' = q_0'''(1 + \beta_0(T'_b(x) - T'_0))$$

$$f_i(\xi) = pe(\xi, \mu_i) = e^{-\mu_i \xi^2/2} {}_1F_1(\alpha_i, 1, \mu_i \xi^2)$$

$$\mu_i = \lambda_i^{1/2}$$

$$\alpha_i = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\mu_i}{2} - \frac{S_1^2}{2\mu_i}\right)$$

ove  $\lambda_i$  sono le soluzioni della seguente equazione trascendente:

$$\left. \frac{df_i}{dr} \right|_{r=1} + \frac{1}{2R_W} f_i|_{r=1} = 0 \quad (5.15)$$

e possono essere facilmente calcolate tramite una procedura numerica.

La distribuzione di temperatura di mescolamento, che è usata nella presente procedura iterativa come distribuzione assiale di temperatura, è data da:

$$\begin{aligned}
\frac{T'_b(x, r) - T'_a}{T'_a - T'_0} &= -4 \sum_{i=1}^{\infty} A_i e^{-\lambda_i x^*} \left( \frac{1}{\lambda_i} \left. \frac{df_i}{d\xi} \right|_{\xi=1} + \frac{S_1^2}{\lambda_i} \int_0^1 f_i(\xi) \xi d\xi \right) + \\
&\quad + \frac{S_0}{S_1^2} \frac{1}{J_0(S_1) - 2R_W S_1 J_1(S_1)} \frac{8J_2(S_1)}{S_1^2} - \frac{S_0}{S_1^2} \quad (5.16)
\end{aligned}$$

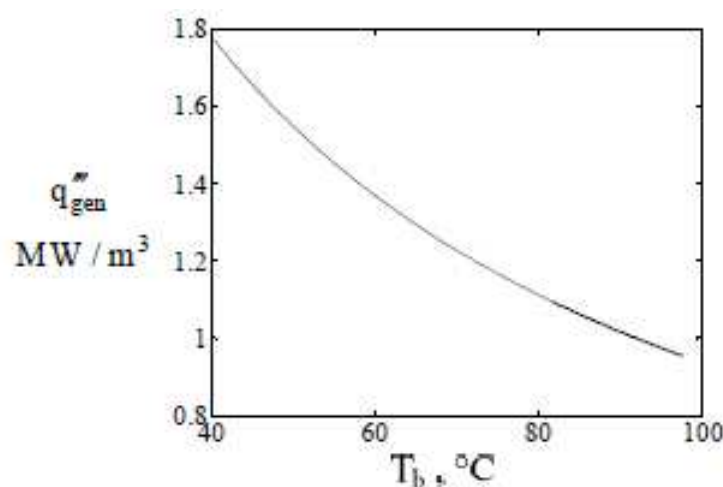


Figura 5.2: Distribuzione tipica del termine di generazione di calore come funzione della temperatura di mescolamento

### 5.2.5 Stima del coefficiente di trasferimento esterno di calore

Il coefficiente di trasferimento esterno di calore convettivo è stimato come  $5W/m^2K$ . Al fine di tenere in considerazione il trasferimento di calore anche per irraggiamento all'esterno, il coefficiente di scambio termico con l'ambiente è stato considerato pari a  $\alpha_e = 10W/m^2K$ .

## 5.3 Risultati e discussione

Sono state analizzate l'influenza della portata in massa del cibo e l'influenza dello spessore dell'isolante termico.

Per il campo termico, Eq. (5.13), sono stati considerati nei calcoli 20 autovalori  $\lambda_i$ . Questo assicura un calcolo accurato del campo termico [31].

In Figura 5.2 viene rappresentata una distribuzione di generazione di calore, tipica per la presente analisi, come funzione della temperatura di mesco-

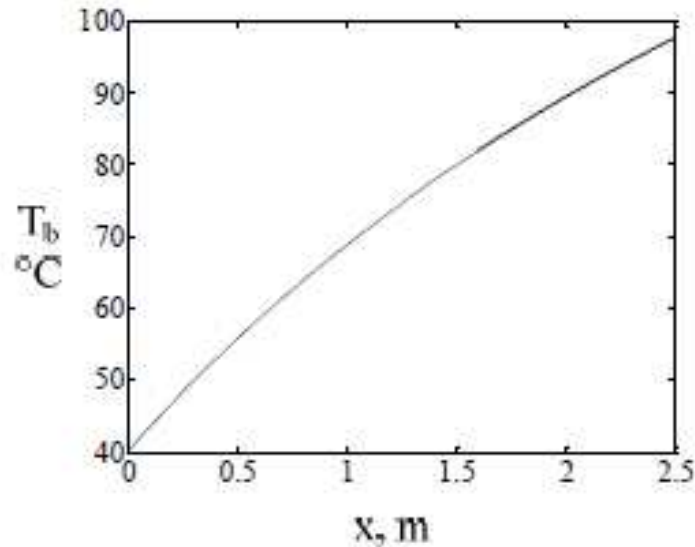


Figura 5.3: Distribuzione tipica della temperatura di mescolamento

lamento. La generazione interna di calore cala al crescere della temperatura di mescolamento. La loro relazione è quasi lineare. La generazione interna di calore è molto alta nella sezione di ingresso, dove è dell'ordine di grandezza di  $2\text{MW}/\text{m}^3$ . Alla sezione di uscita, la generazione interna di calore è dell'ordine di  $1\text{MW}/\text{m}^3$ .

In Figura 5.3 è mostrata una distribuzione di temperatura di mescolamento, tipica della presente analisi. Per questa applicazione, il caso più frequente è una temperatura di ingresso di  $40^{\circ}\text{C}$  e una temperatura di uscita di  $100^{\circ}\text{C}$ .

In Tabella 5.2 vengono riassunti i risultati che mostrano l'influenza dello strato di isolante termico sul condotto di vetro. I principali risultati sono riportati in Tabella 5.3. Si può osservare che un isolamento di 5 cm di fibra di vetro è una scelta ragionevole per questa applicazione.

I profili di temperatura radiale per questi casi sono rappresentati in Figura 5.4. Si può osservare che il profilo corrispondente alla stessa stazione assiale e ad un differente grado di isolamento termico hanno un andamen-



Tabella 5.2: Influenza dell'isolamento termico: casi d'analisi

Caso	portata in massa	isolamento	$R_W$
1	82.5 kg/h	no	1.1
2	82.5 kg/h	5cm fibra di vetro	4.3
3	82.5 kg/h	17cm fibra di vetro	10
4	82.5 kg/h	strato infinito	$\rightarrow \infty$

Tabella 5.3: Risultati principali: influenza dell'isolamento termico

Caso	$R_W$	$S_0$	$S_1^2$	$T'_{out}$
1	1.1	-96.6	-13.4	98°C
2	4.3	-98.2	-13.4	100°C
3	10	-98.6	-13.4	101°C
4	$\rightarrow \infty$	-102.1	-13.3	105°C

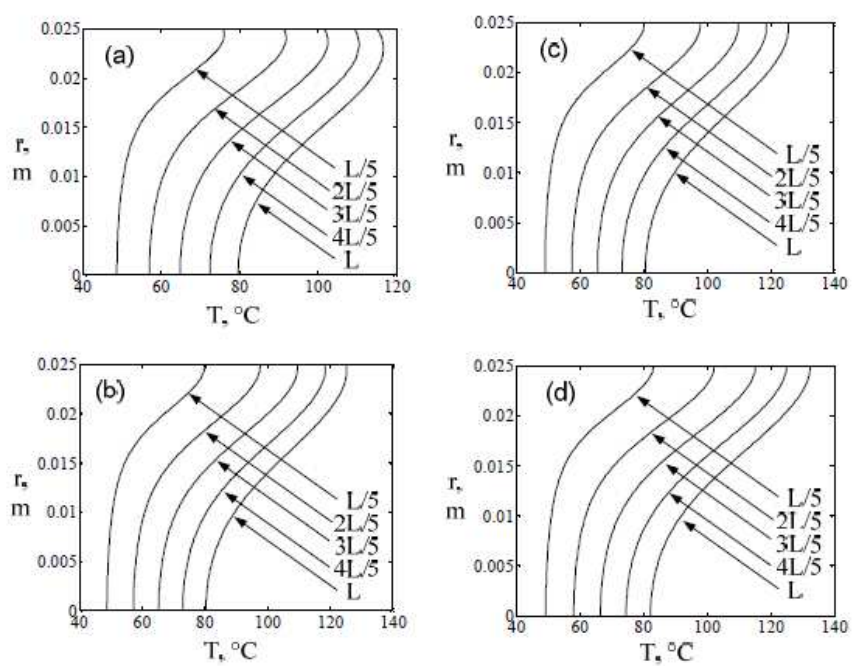


Figura 5.4: Profili radiali di temperatura in corrispondenza di diverse sezioni del condotto per i casi di studio di Tabella 5.3:(a): caso n. 1; (b): caso n. 2; (c): caso n. 3; (d): caso n. 4

Tabella 5.4: Influenza della portata in massa: casi d'analisi (nessun isolamento termico)

Caso	portata in massa	Pe	R <sub>w</sub>
1	61.9 kg/h	2799	1.1
2	82.5 kg/h	3732	4.3
3	123.8 kg/h	5598	10

to piuttosto simile. Il profilo di temperatura radiale è caratterizzato da un massimo in  $r' \approx 0.8R$ , il che denota che il calore sia trasferito radialmente sia all'ambiente che al fluido che scorre nel centro del condotto. Inoltre, ogni profilo di temperatura radiale è poco uniforme. Questo non è apprezzato nella presente applicazione, poiché porta ad un trattamento termico non uniforme del cibo.

In Tabella 5.4 viene mostrata l'influenza della portata in massa del fluido elaborato. La portata in massa da progetto (si veda la Sezione 5.5 per maggiori dettagli) è pari a  $82.5 \text{ kg/h}$ . Sono esaminati inoltre due altri casi: il primo è caratterizzato dalla riduzione del 15% della portata in massa da progetto (portata in massa pari a  $61.9 \text{ kg/h}$ ); il secondo è caratterizzato dall'incremento del 50% della portata in massa (portata in massa pari a  $123.8 \text{ kg/h}$ ).

I risultati principali sono riassunti in Tabella 5.5. Dato che il presente problema non è lineare, la relazione tra la portata in massa e la temperatura esterna è distante dalla linearità-

In Figura 5.4 vengono mostrati i profili radiali di temperatura corrispondenti a questi casi di analisi, per diverse sezioni del condotto. Come osservato nella discussione di ciascun profilo di temperatura radiale è caratterizzato dal-

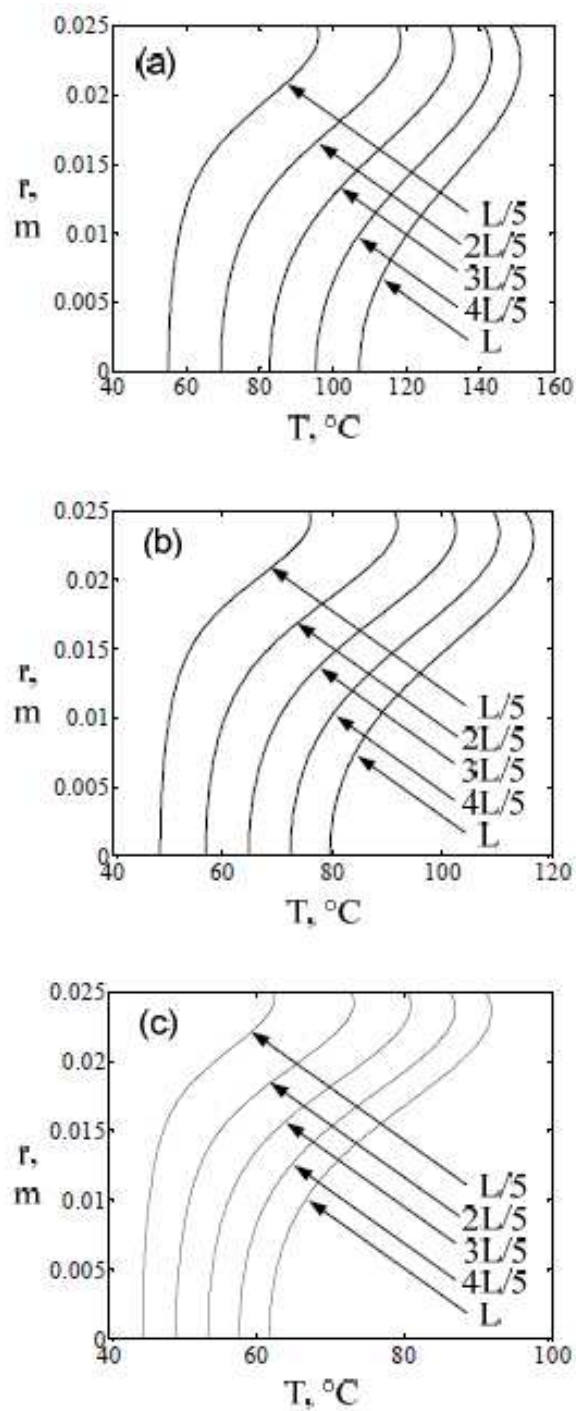


Figura 5.5: Profili radiali di temperatura in corrispondenza di diverse sezioni del condotto per i casi di studio di Tabella 5.5:(a): caso n. 1; (b): caso n. 2; (c): caso n. 3

Tabella 5.5: Risultati principali: influenza della portata in massa

Caso	Pe	S <sub>0</sub>	S <sub>1</sub> <sup>2</sup>	T' <sub>out</sub>
1	2799	-124.4	-13.8	133°C
2	3732	-96.6	-13.4	98°C
3	5598	-78.9	-13.0	74°C
4	→ ∞	-102.1	-13.3	105°C

la presenza di un massimo, che denota che il calore sia radialmente trasferito sia all'ambiente, che al fluido che scorre nel centro del condotto.

## 5.4 Considerazioni conclusive

Il metodo proposto per l'analisi di un riscaldatore ohmico collineare cilindrico in flusso laminare presenta alcuni aspetti di interesse:

- La variazione della conduttività elettrica del cibo ha un'elevata influenza sulle previsioni.
- Il metodo è veloce e accurato. Mediante questo sistema, sono possibili diverse considerazioni di interesse pratico, come la determinazione della temperatura del fluido alla sezione di uscita del riscaldatore, e il calcolo del calore ceduto all'ambiente. Inoltre, la possibilità di rappresentare i profili di temperatura radiale ad ogni sezione trasversale del condotto è di grande rilevanza pratica, poiché consente di verificare se il trattamento termico del cibo è uniforme o meno.
- Per il calcolo del campo termico, l'assunzione di dipendenza lineare del termine di generazione di calore con la distribuzione assiale di

temperatura sembra valida.

Sulla base di questi risultati, sono evidenziate anche alcune considerazioni di interesse pratico per il progetto di riscaldatori ohmici cilindrici:

- Valori negativi di  $S_1^2$  introducono un effetto stabilizzante sul capo termico, perché la generazione interna di calore cala al crescere della temperatura.
- Per il presente riscaldatore ohmico, un valore di  $R_W$  di ordine 10 sembra essere una scelta ragionevole.

## 5.5 Appendice

Considerando la parete del tubo come adiabatica, la generazione interna di calore e tutte le proprietà del fluido sono costanti alla temperatura di riferimento  $T'_m = (T'_{out} - T'_{in})/2$ , da un bilancio di energia globale segue che:

$$q'''_{gen} = \frac{mc_p(T'_{out} - T'_{in})}{\pi D_i^2 L/4} \quad (5.17)$$

Inoltre, sotto queste assunzioni, il potenziale elettrico nel fluido è costante con valore pari a  $V = \Delta V/L$ . Quindi, l'Equazione (5.11), può essere semplificata come segue:

$$q'''_{gen} = \sigma(T'_m) \left( \frac{\Delta V}{L} \right)^2 \quad (5.18)$$

Assunto come temperatura di uscita  $T'_{out} = 105^\circ C$ , come temperatura di ingresso  $T'_{in} = 40^\circ C$  e come portata in massa  $m = 82.5 Kg/h$ , segue dalle Equazioni (5.17),(5.18),(5.1), che  $\Delta V$  deve essere dell'ordine di 2000 V.



# Capitolo 6

## Considerazioni conclusive

A fronte del presente lavoro di Tesi, è possibile avanzare alcune considerazioni conclusive sia sull'aspetto fenomenologico della convezione forzata laminare in condotti cilindrici con generazione interna di calore, sia sull'applicazione di riscaldamento ohmico in generatori di tipo collineare.

Per quanto riguarda gli aspetti fenomenologici, si è osservato che nella regione di completo sviluppo tutta la potenza termica generata dallo scambiatore viene dissipata all'ambiente. Pertanto, questa è una zona in cui il fluido non aumenta la propria temperatura e lo scambiatore di fatto non riscalda ulteriormente l'alimento.

E' stato approfondito l'effetto della variazione della generazione di calore nel riscaldatore, per via della variabilità della conduttività elettrica dei cibi con la temperatura.

L'ipotesi di generazione di calore costante nello scambiatore è valida quando il parametro di generazione  $S_1^2$  risulta essere compreso nell'intervallo  $-0.1 < S_1^2 < 0.1$ . In tal caso, il numero di Nusselt asintotico assume lo stesso valore, indipendentemente dai parametri adimensionali del caso.

Quando la variabilità del termine generativo assume un peso non trascura-



bile sui risultati, si è osservato che nel caso di generazione di calore crescente con la temperatura è possibile avere delle configurazioni che conducono in teoria al catastrofismo. E' necessario pertanto limitare il parametro di generazione  $S_1^2$  entro un valore di soglia, che è stato dimostrato dipendere dai parametri adimensionali del problema mediante una formulazione completamente analitica. Valori negativi del parametro  $S_1^2$  hanno invece un effetto stabilizzante sul campo di temperatura entro lo scambiatore e sono pertanto preferibili nelle applicazioni.

Così come nel caso di generazione di calore costante, anche nel caso di generazione di calore variabile il numero di Nusselt competente alla regione di completo sviluppo può essere calcolato per mezzo di una equazione analitica esatta ed è stato dimostrato dipendere solo dal parametro  $S_1^2$ . L'assunzione di parete adiabatica, generalmente adottata nei problemi tradizionali di scambio termico nei condotti in assenza di fenomeni generativi nel caso di elevati valori del parametro  $R_W$ , è dimostrato essere non appropriata per descrivere la regione di completo sviluppo quando  $S_1^2 \geq 0$ . Viceversa, tale assunzione è valida per la regione di completo sviluppo quando la generazione interna di calore è decrescente con la temperatura.

Sono stati inoltre analizzati i possibili effetti di preriscaldamento del fluido per effetto della conduzione assiale di calore. Dal momento che le pareti degli scambiatori ohmici sono generalmente costituite da materiale isolante, l'effetto di preriscaldamento per effetto della conduzione del calore lungo le pareti del condotto risulterà di poco conto [34] e, pertanto, nel presente lavoro di Tesi è stato trascurato. La conduzione assiale di calore nel fluido risulta invece pertinente alle possibili applicazioni che vedono l'elaborazione di una grande quantità di fluido elaborato ma a basse velocità e, pertanto, è stata presa in analisi. Diversamente dai casi di scambio termico nei condotti in

assenza di fenomeni generativi [34], quando viene introdotto un termine di generazione interna di calore, la conduzione assiale risulta non avere influenza sui parametri di scambio termico nella regione di completo sviluppo, ma diviene confinata solamente nella regione di ingresso termico. E' stato inoltre mostrato che l'estensione di quest'ultima regione cresce quando il numero di Péclet cala. Similmente a quanto già assodato in letteratura in assenza di fenomeni generativi [11], il numero di Péclet ha influenza quando  $Pe < 100$ .

Per contro, il modello matematico che compete al caso con conduzione assiale di calore nel fluido non consente una soluzione esatta delle equazioni, ma richiede l'utilizzo di procedure di tipo iterativo per via del calcolo delle costanti che discendono dal metodo di separazione delle variabili. I tempi di calcolo pertanto risulteranno molto più elevati rispetto a quelli, piuttosto contenuti, del medesimo caso, ma con assenza di conduzione assiale del calore. Per via dei motivi elencati, non è stato ritenuto vantaggioso, a fronte delle complicazioni di calcolo, utilizzare un modello di calcolo per l'applicazione oggetto del presente lavoro in cui sia incluso l'effetto della conduzione assiale.

Una volta applicata la metodologia di calcolo sviluppata nel presente lavoro di Tesi per l'analisi di uno riscaldatore ohmico collineare cilindrico in flusso laminare, è possibile avanzare una serie di considerazioni di carattere tecnico-pratico. Il metodo di calcolo proposto è risultato molto veloce e accurato. Mediante di esso, è possibile determinare la temperature del fluido alla sezione di uscita del riscaldatore e quanto calore è stato dissipato all'ambiente. E' inoltre possibile rappresentare i profili di temperatura per ogni sezione trasversale del condotto. Ciò è di fondamentale importanza pratica in quanto consente di verificare se il trattamento termico del cibo è uniforme o meno.

Ai fini del calcolo del campo termico, l'assunzione di dipendenza lineare

del termine di generazione di calore con la temperatura sembra essere valida e la variazione della conduttività elettrica del cibo con la temperatura sembra avere una elevata influenza sui calcoli.

Il modello matematico sviluppato sembra essere sufficientemente dettagliato dunque per l'analisi di uno scambiatore ohmico a geometria cilindrica. Per l'analisi di geometrie siffatte, l'utilizzo di codici CFD sembra pertanto non competitivo rispetto al metodo proposto in termini di accuratezza di calcolo e, soprattutto, tempi di calcolo.

Il metodo proposto può inoltre costituire una base per la validazione di un metodo di calcolo CFD, che sarà poi destinato all'analisi di geometrie più complicate di quelle oggetto della presente analisi.

Il metodo proposto può essere inoltre esteso, con qualche "accorgimento" ingegneristico, anche al calcolo di scambiatori ohmici compatti, che vedono una successione di sezioni di riscaldamento a geometria cilindrica, tra loro collegate da giunzioni "ad U". In tal caso, le condizioni di temperatura di uscita dal tubo  $i$ -esimo saranno utilizzate come condizioni di ingresso per il condotto successivo.

Un possibile sviluppo del lavoro è necessariamente quello di condurre una campagna di prove sperimentali in regime laminare sulla base delle quali poter validare la metodologia proposta.

Sarà inoltre necessario indagare il regime di moto turbolento. A tal fine, la metodologia qui proposta resta valida, a patto di sostituire al profilo parabolico laminare, un profilo piatto, per una analisi grossolana (piston-flow), o un profilo di tipo power-law, e di individuare le appropriate autofunzioni che consentano la soluzione del relativo problema di Sturm-Liouville.

# Nomenclatura

## Simboli generali

$A$	costante
$c_p$	calore specifico a pressione costante J/kg K
$D$	diametro interno del condotto m
$D_e$	diametro esterno del condotto
$f$	funzione ausiliaria
$g$	funzione ausiliaria
$F_1$	funzione ipergeometrica di confluenza
$I_\alpha$	funzione di Bessel modificata del primo tipo di ordine $\alpha$
$J_\alpha$	funzione di Bessel del primo tipo di ordine $\alpha$
$h_x$	coefficiente di scambio termico per convezione, W/m <sup>2</sup> K
$k$	conduttività termica W/m K
$K$	coefficiente di trasferimento di calore dell'ambiente
$Nu_x$	numero di Nusselt locale
$pe$	funzione di Poiseuille
$Pe$	numero di Péclet, $Pe = RePr$
$Pr$	numero di Prandtl, $Pr = \nu\rho c_p/k$

$q''$	densità di flusso termico $\text{W}/\text{m}^2$
$q_o'''$	parte costante del termine generativo $\text{W}/\text{m}^3$
$q_w$	flusso di calore adimensionale alla parete
$S_0$	parametro di generazione di calore adimensionale
$S_1^2$	parametro di generazione di calore adimensionale
$Re$	numero di Reynolds, $Re = WD/\nu$
$T'$	temperatura K
$T$	temperatura adimensionale, $T = (T' - T'_a)/(T'_a - T'_o)$
$T'_a$	temperatura dell'ambiente esterno K
$U$	coefficiente di scambio termico con l'ambiente $\text{W}/\text{m}^2 \text{K}$
$W$	velocità assiale media $\text{m}/\text{s}$
$\Delta V$	voltaggio
$r'$	coordinata radiale m
$r$	coordinata radiale adimensionale, $r = r'/D/2$
$x'$	coordinata assiale m
$x^*$	coordinata assiale adimensionale, $x^* = x'/(RePrD/2)$

### Simboli greci

$\alpha$	diffusività termica
$\beta'_0$	parte variabile del termine generativo $\text{W}/\text{m}^3 \text{K}$
$\lambda$	costante di separazione
$\mu$	condizione ausiliaria, $\mu = \lambda^{1/2}$
$\nu$	viscosità cinematica $\text{m}^2/\text{s}$
$\rho$	densità $\text{kg}/\text{m}^3$
$\sigma$	conduttività elettrica
$\chi$	coefficiente di variazione della conduttività elettrica con la temperatura

**Pedici**

$\rho$  infinito

$a$  ambiente

$b$  mescolamento

$fd$  completamente sviluppato

$i$  i-esimo

$o$  iniziale

$w$  parete

$in$  isolante



# Appendice A

## Listati Programmi

### A.1 Plottaggio parametri scambio termico, caso T, Capitolo 1

```
function [x,Tb]=figura_nusselt_ecc_t

% Questo è il caso T
% Questa funzione crea la figura che plotta:
% 1. twall adimensionale
% 2. tbulk adimensionale
% 3. nusselt

Q_gen=[-10];

x=linspace(5*10^-3,10,5000);
x=0.39;
n=size(x,2);

n_autovalori=20;

A_0=[1.476435407;-0.806123896;0.588762154;-0.475850426
0.405021811;-0.355756506;0.319169053;-0.290735829
```



```
0.267891183;-0.249062533;0.233227793;-0.21969145  
-0.197683094;0.188586606;-0.180469193;0.17317245  
0.160565111;-0.155072718;0.150027149;-0.145372945];
```

```
A_1=[0.08333336;-0.15195858;0.127511124;-0.108479395  
0.094757115;-0.084520012;0.076593253;-0.070261486  
0.065074906;-0.060738663;0.057051883;-0.053873035  
-0.048654915;0.188586606;-0.044534017;0.042777547  
0.039730028;-0.038397593;0.037171117;-0.03603777];
```

```
df=[-1.014300459;1.349241622;-1.572319339;1.746004335  
-1.890857124;2.016466653;-2.12816475;2.229255418  
-2.321943339;2.407781165;-2.487908255;2.56318824  
2.701757377;-2.766013677;2.82741798;-2.88626697  
-2.997262817;3.049806153;-3.100599747;3.149782326];
```

```
landa=[7.313586916;44.6094611;113.9210308;215.2405433  
348.5641154;513.8900606;711.2175327;940.5460565  
1201.875343;1495.205203;1820.535508;2177.866168  
2988.528302;3441.859687;3927.191241;4444.522941  
5575.190756;6188.51873;6833.850846;7511.183038];
```

```
h=size(Q_gen,2);  
for k=1:h  
    S=Q_gen(k);  
    Tw_ad=0;  
Tb_ad=0;  
Nu=0;  
Tw=0;  
Tb=0;  
heat_flux=0;  
for i=1:n
```

---

```
z=x(i);
tbulck=0;
flusso=0;
for j=1:n_autovalori
    tbulck=tbulck-4*((-1-S/4)*A_0(j)+S*A_1(j))...
*exp(-z*landa(j))*df(j)/landa(j);
    flusso=flusso+((-1-S/4)*A_0(j)+S*A_1(j))...
*exp(-z*landa(j))*df(j);
end;
tbulck=tbulck+S/6;
flusso=flusso-S/2;

heat_flux(i)=flusso;
Nu(i)=+2*flusso/(-tbulck);
Tw(i)=0;
Tb(i)=tbulck;
Tw(i)=0;
end;
hold on
plot(x,heat_flux)
hold on
plot(x,Tb)
hold on
plot(x,Tw)
hold on

end

figure(2)
plot(x,Nu,'k')
```

## A.2 Plottaggio parametri di scambio termico, caso con $Rw > 0$ , Capitolo 1

```
function [Tw,Tb,Nu,x]=figura_nusselt_ecc_t3_Rw_0_25

% Questa funzione crea la figura che plotta:
% 1. twall adimensionale
% 2. tbulk adimensionale
% 3. nusselt
figure(1)

x=linspace(5*10^-3,10,500);
%x=linspace(100,101,1);

% Questi dati sono quelli che ho considerato per Hsu
%x=[0.001 0.002 0.004 0.008 0.016 0.032 0.064
% 0.128 0.256 0.512 1 2 4 8 16
%];
n=size(x,2);
% Computazione Rw 0.25
n_autovalori=28;
Rw=0.25;

A_0=[1.296108547;-0.447144982;0.246677318;-0.163480385
0.119403829;-0.092615243;0.074830993;-0.062274194
0.052995927;-0.045896416;0.040311491;-0.035818094
0.032134903;-0.02906809;-0.024270718;0.022365481
-0.020707855;0.019254263;-0.017970598;0.016829816
0.169594659;-0.015810214;0.014894189;-0.014067327
0.013317716;-0.012635434;0.012012156;-0.011440847];

A_1=[0.091284333;-0.148572114;0.09654226;-0.068283923
0.051673326;-0.040993145;0.033645122;-0.028326458
0.024323585;-0.021216871;0.018745061;-0.016737791
```

```
0.015079631;-0.013689826;-0.011498385;0.010621932
-0.009856427;0.009182816;-0.008586092;0.008054287
0.039479932;-0.007577746;0.007148605;-0.006760394
0.006407747;-0.006086179;0.005791915;-0.005521753];
```

```
f=[0.367879441;-0.332750883;0.30270284;-0.280733139
0.263958061;-0.250604128;0.239625351;-0.230372873
0.22242242;-0.215483759;0.209350761;-0.20387238
0.198934993;-0.194451205;-0.186584238;0.183102267
-0.179870397;0.176858653;-0.174041952;0.171399109
-0.114005282;-0.168912088;0.166565417;-0.006760394
0.162241425;-0.160242342;0.158339567;-0.156525227];
```

```
landa=[4;32.99264983;93.02718106;184.6970279;308.1710673
463.5213624;650.7856016;869.9861065;1121.137259
1404.24891;1719.328122;2066.380148;2445.40901
2856.41786;3774.385145;4281.347326;4820.297182
5391.235909;5994.164531;6629.083928;6958.760673
7295.994865;7994.89801;8725.793952;9488.683211
10283.56625;11110.44348;11969.31528];
```

```
Q_gen=[10];
S=-277,
```

```
Tb=0;
```

```
Tw=0;
```

```
Nu=0;
```

```
grad_temp=0;
```

```
Tb_ad=0;
```

```
for i=1:n
```

```
    z=x(i);
```

```
    tbulck=0;
```

```
    twall=0;
```

```
    for j=1:n_autovalori
```

```
        twall=twall+((-1-Rw*S*(1+1/(4*Rw)))*A_0(j)+S*A_1(j))...
*exp(-z*landa(j))*f(j);
        tbulck=tbulck+((-1-Rw*S*(1+1/(4*Rw)))*A_0(j)+S*A_1(j))...
*exp(-z*landa(j))*(2/(landa(j)*Rw))*f(j);
        mu=landa(j)^0.5;
        a=0.5*(1-0.5*mu);
        b=1;
        c=0;
        %hyper=mchgm_alternativo(a,b,c);
        % f_axial=(exp(0)*((-1-Rw*S*(1+1/(4*Rw)))*A_0(j)+S*A_1(j))...
% *exp(-z*landa(j))*hyper)+f_axial;
    end;
    twall=twall+Rw*S;
    tbulck=tbulck+Rw*S+1/6*S;
    Tb(i)=tbulck;
    Tw(i)=twall;
    Nu(i)=-twall/Rw*1/(twall-tbulck);
    grad_temp(i)=-twall/(2*Rw);
    Tb_ad(i)=2*S*z-1;
end;
figure(1)
hold on
plot(x,Tw);
hold on
plot(x,Tb);
hold on
plot(x,grad_temp)
figure(2)
plot(x,Nu)
```

### A.3 Plottaggio profili radiali di temperatura adimensionale, $R_W > 0$ , Capitolo 1

```
function [T]=locali_temperatura_revisited

% Disegna i profili locali di temperatura Rw = 0.25

S=10;
Rw=0.25;

x=[5*10^-3;10^-2;10^-1;1;10]
qqq=size(x,2);

n_autovalori=20;

A_0=[1.296108547;-0.447144982;0.246677318;-0.163480385
0.119403829;-0.092615243;0.074830993;-0.062274194
0.052995927;-0.045896416;0.040311491;-0.035818094
0.032134903;-0.02906809;-0.024270718;0.022365481
-0.020707855;0.019254263;-0.017970598;0.016829816
0.169594659;-0.015810214;0.014894189];

A_1=[0.091284333;-0.148572114;0.09654226;-0.068283923
0.051673326;-0.040993145;0.033645122;-0.028326458
0.024323585;-0.021216871;0.018745061;-0.016737791
0.015079631;-0.013689826;-0.011498385;0.010621932
-0.009856427;0.009182816;-0.008586092;0.008054287
0.039479932;-0.007577746;0.007148605];

landa=[4;32.99264983;93.02718106;184.6970279
308.1710673;463.5213624;650.7856016;869.9861065
1121.137259;1404.24891;1719.328122;2066.380148
2445.40901;2856.41786;3774.385145;4281.347326
4820.297182;5391.235909;5994.164531;6629.083928
```

```

6958.760673;7295.994865;7994.89801];

f_uno=[0.367879441;-0.332750883;0.30270284;-0.280733139
0.263958061;-0.250604128;0.239625351;-0.230372873
0.22242242;-0.215483759;0.209350761;-0.20387238
0.198934993;-0.194451205;-0.186584238;0.183102267
-0.179870397;0.176858653;-0.174041952;0.171399109];
T=zeros(1,1);
Tb=zeros(1,1);

for i=1:6
    z=x(i)
    T=0;
    Tb=0;
    for k=1:11
        r(k)=(k-1)/10;
        t=0;
        tbulck=0;
        for j=1:n_autovalori
            f=0;
            mu=landa(j)^0.5;
            a=0.5*(1-0.5*mu);
            b=1;
            c=mu*r(k)^2;
            hyper=mchgm_alternativo(a,b,c);
            % calcolo del valore locale della funzione ipergeometrica confluyente
            f=exp(-mu*(r(k)^2)/2)*hyper;
            t=t+((-1-Rw*S*(1+1/(4*Rw)))*A_0(j)+S*A_1(j))*exp(-z*landa(j))*f;
            tbulck=tbulck+4*((-1-Rw*S*(1+1/(4*Rw)))*A_0(j)+S*A_1(j))...
*f_uno(j)*exp(-landa(j)*z)/(2*Rw*landa(j));
        end;
        T(k)=t+Rw*S*(1+1/(4*Rw))-S*(r(k)^2)/4;
        Tb(k)=tbulck+Rw*S+1/6*S;
    end;
end;

```

```
    hold on
    plot(T,r)
    hold on
    %plot(Tb,r)
    hold on
end;
```

## A.4 Distribuzione del numero di Nusselt locale, $R_w > 0$ , Capitolo 1

```
function [Nu,x]=nusselt
n_autovalori=15;
S=0;
Rw=0.25;

% Questi sono calcolati per Rw=0.25

A_0=[1.296108547;-0.447144982;0.246677318;-0.163480385
0.119403829;-0.092615243;0.074830993;-0.062274194
0.052995927;-0.045896416;0.040311491;-0.035818094
0.032134903;-0.02906809;-0.024270718;0.022365481];

A_1=[0.091284333;-0.148572114;0.09654226;-0.068283923
0.051673326;-0.040993145;0.033645122;-0.028326458
0.024323585;-0.021216871;0.018745061;-0.016737791
0.015079631;-0.013689826;-0.011498385;0.010621932];

f=[0.367879441;-0.332750883;0.30270284;-0.280733139
0.263958061;-0.250604128;0.239625351;-0.230372873
0.22242242;-0.215483759;0.209350761;-0.20387238
0.198934993;-0.194451205;-0.186584238;0.183102267];
```



```
landa=[4;32.99264983;93.02718106;184.6970279
308.1710673;463.5213624;650.7856016;869.9861065
1121.137259;1404.24891;1719.328122;2066.380148
2445.40901;2856.41786;3774.385145;4281.347326];

% Computazione
S=0

for k=1:6

x=0;
x(1)=0.001;
Nu=0;
for i=1:10000
    z=x(i);
    numeratore=0;
    denominatore=0;
    for j=1:n_autovalori
        numeratore=- (1/Rw)*((-1-Rw*S*(1+1/(4*Rw)))*A_0(j)+S*A_1(j))...
*exp(-z*landa(j))*f(j)+numeratore;
        denominatore=(-1-Rw*S*(1+1/(4*Rw)))*A_0(j)+S*A_1(j)...
*exp(-z*landa(j))*(1-2/(landa(j)*Rw))*f(j)+denominatore;
    end;
    numeratore=numeratore-S;
    denominatore=denominatore-1/6*S;
    Nu(i)=numeratore/denominatore;
    x(i+1)=x(i)+0.001;
end;
x=x(1:10000);
plot(x,Nu);
hold on;
S=S+0.2;
```

```
end;
```

## A.5 Caso adiabatico con generazione interna di calore costante, distribuzione assiale della temperatura di parete adimensionale

```
function [twall]=adiabatico_per_nussel_mc_adams(x,S)

autovalori=19;

%A=[0.403483218;-0.175110001;0.105591724;-0.073282403
%0.055036506;-0.043484384;0.035595112;-0.029908474
%0.02564012;-0.022333705;0.01970693;-0.017576465
%0.015818439;-0.014346365;0.013098158;-0.012028181
%0.011102191;-0.010294029;0.009583394;];
%% Gli ho ricalcolati le costanti

A=[0.319829457;-0.101619365;0.049796584;-0.029555514
0.019572896;-0.013918755;0.01040647;-0.00807534
0.006449018;-0.005269317;0.004386371;-0.003708319
0.003176297;-0.002751167;0.002406083;-0.00212213
0.001885669;-0.001686665;0.001517601]

landa=[25.679612;83.86175546;174.1667407;296.5362993
450.9471942;637.3873368;855.8494988;1106.328961
1388.822448;1703.327579;2049.842563;2428.366016
2838.896841;3281.434151;3755.977222;4262.525448
4801.078322;5371.635411;5974.196345];

f=[-0.492516573;0.395508475;-0.345873677;0.314046481
-0.291251457;0.2738069523890732;-0.259853028;0.248331964
-0.238590398;0.230199255;-0.222863114;0.216370775
```

```
-0.210566541;0.205332668;-0.200578167;0.19623142  
-0.192235144;0.188542876;-0.185116466];  
  
twall=0;  
  
for i=1:n  
    z=x(i);  
    tempe=0;  
    for j=1:autovalori  
        tempe=tempe+S/4*A(j)*f(j)*exp(-z*landa(j));  
    end;  
    tbulck(i)=2*S*z-1;  
    twall(i)=tbulck(i)+S/16+tempe;  
end;  
%plot(x,twall)  
%hold on  
%plot(x,tbulck)  
%hold on
```

## A.6 Numero di Nusselt completamente sviluppato

```
function [Nu]=numero_nusselt_fully_dev  
So=1;  
S1_tutto=linspace(-100,-0.1,1000);  
% che coincide con  $S1^2$  del modello matematico per un fatto di notazione  
% Il numero 5 discende dal valore massimo limite al parametro  $S1^2$ , che si  
% ottiene per il caso T  
n=size(S1_tutto,2)  
for i=1:n  
    S1=S1_tutto(i);  
    Nu(i)=-2*(S1)^0.5*besselJ(1,(S1)^0.5)/(besselJ(0,(S1)^0.5)...
```

```

-8/(S1)*besselJ(2,(S1)^0.5));
end;
plot(S1_tutto,Nu,'k')
hold on
%plot(0,6,'ko') % il nostro vecchio
hold on
%plot(0,6,'ks'); % mori et al
hold on
%plot(5,4.454,'ks') % Mori et al
hold on
S1=1;
%Nu=-2*(S1)^0.5*besselJ(1,(S1)^0.5)/(besselJ(0,(S1)^0.5)-8/(S1)...
% *besselJ(2,(S1)^0.5)); % il primo di FF64
%plot(S1,Nu,'k*')
hold on
S1=4;
%Nu=-2*(S1)^0.5*besselJ(1,(S1)^0.5)/(besselJ(0,(S1)^0.5)-8/(S1)...
%*besselJ(2,(S1)^0.5)); % il secondo di FF64
%plot(S1,Nu,'k*')
hold on

```

Titolo: Parametri di scambio termico,  $R_w=0.25$

```

function [qw,tw,tb]=tw_tb_qw
figure(2)
% In questo caso per  $R_w = 0.25$ 
n=500;
x=linspace(0,10,n);
So=10;
Rw=0.25;
%%%%%%%%%%
% S1 = 0
%%%%%%%%%%
autovalori=20;

```

```
A=[-6.863807959;1.197148749;-0.514641302;0.298043077
-0.199689712;0.145760012;-0.11253474;0.090380588
-0.074739713;0.063209786;-0.054418335;0.047530658
-0.042013108;0.037510281;-0.033777288;0.030640463
-0.027973567;0.02568286;-0.023697411;0.021962663];

landa=[4;32.99264983;93.02718106;184.6970279
308.1710673;463.5213624;650.7856016;869.9861065
1121.137259;1404.24891;1719.328122;2066.380148
2445.40901;2856.41786;3299.409221;3774.385145
4281.347326;4820.297182;5391.235909;5994.164531];

fi=[0.367879441;-0.332750883;0.30270284;-0.280733139
0.263958061;-0.250604128;0.239625351;-0.230372873
0.22242242;-0.215483759;0.209350761;-0.20387238
0.198934993;-0.194451205;0.190352493;-0.186584238
0.183102267;-0.179870397;0.176858653;-0.174041952];

for j=1:n
    coord_x=x(j);
    te=0;
    tb_e=0;
    for i=1:autovalori
        te=te+A(i)*fi(i)*exp(-landa(i)*coord_x);
        tb_e=tb_e+A(i)*fi(i)/(2*Rw*landa(i))*exp(-landa(i)*coord_x);
    end;
    tw(j)=te+Rw*So;
    tb(j)=4*tb_e+Rw*So+1/6*So;
    qw(j)=-1/(2*Rw)*tw(j);
end;
%plot(x,tw)
hold on
%plot(x,tb,'k--')
```

```
plot(x,tb,'b')
hold on
%plot(x,qw,'k-')
plot(x,qw,'b')

%%%%%%%%%%
% S1^2= 0.1
%%%%%%%%%%
S1=0.1;
% questo per un fatto di pura notazione:
% in questo codice S1 equivale all'S1^2 nel testo dell'articolo

A=[-7.074925094;1.195695355;-0.512823246;0.2969317
-0.198975303;0.145269281;-0.112179095;0.090111877
-0.07452993;0.063041663;-0.054280693;0.047415961
-0.041916099;0.037427186;-0.033705331;0.030577556
-0.027918113;0.025633612;-0.023653388;0.021923078];

landa=[3.847533996;32.80750118;92.83465127;184.5016262
307.9742284;463.3236919;650.5874024;869.7875479
1120.938444;1404.049904;1719.128971;2066.180883
2445.209653;2856.218429;3299.209728;3774.185601
4281.147739;4820.097557;5391.036252;5993.964846];

fi=[0.370861473;-0.333359232;0.302935645;-0.280850927
0.264027604;-0.250649395;0.239656862;-0.230395911
0.222439903;-0.215497423;0.209361696;-0.203881304
0.198942397;-0.194457434;0.190357797;-0.186588801
0.183106228;-0.179873865;0.176861712;-0.174044666];

firdr=[0.317451091;-0.111453917;0.065675323;-0.046165311
0.035465896;-0.028740038;0.024132669;-0.020784265
0.018243416;-0.016250813;0.014647102;-0.013329054
0.012226903;-0.011291831;0.010488669;-0.009791444
```

```

0.00918057;-0.008640994;0.008160963;-0.007731167];

for j=1:n
    coord_x=x(j);
    te=0;
    tb_e=0;
    for i=1:autovalori
        te=te+A(i)*fi(i)*exp(-landa(i)*coord_x);
        tb_e=tb_e+A(i)*(fi(i)/(2*Rw*landa(i))...
        -S1/landa(i)*firidr(i))*exp(-landa(i)*coord_x);
    end;
    tw(j)=te+1/(2*Rw)*So/S1*besselJ(0,(S1)^0.5)...
/(1/(2*Rw)*besselJ(0,(S1)^0.5)-(S1)^0.5*besselJ(1,(S1)^0.5))-So/S1;
    tb(j)=4*tb_e+1/(2*Rw)*So/S1*(8/S1)*besselJ(2,(S1)^0.5)...
/(1/(2*Rw)*besselJ(0,(S1)^0.5)-(S1)^0.5*besselJ(1,(S1)^0.5))-So/S1;
    qw(j)=-1/(2*Rw)*tw(j);
end;
hold on
%plot(x,tw)
hold on
%plot(x,tb,'k--')
plot(x,tb,'g')
hold on
%plot(x,qw,'k-')
plot(x,qw,'g')

%%%%%%%%%%
% S1^2= 0.5
%%%%%%%%%%
S1=0.5;
% in realtà coincide con quello al quadrato ! secondo la notazione nuova

A=[-8.126014711;1.18984231;-0.50552792;0.292486057
-0.19612042;0.143308867;-0.110758441;0.089038461

```

```

-0.073691865;0.062369979;-0.053730747;0.046957658
-0.041528448;0.037095117;-0.033417755;0.030326137
-0.027696467;0.025436769;-0.023477422;0.021764847];

landa=[3.234684559;32.06638204;92.06460565;183.7201995
307.1870606;462.5331835;649.7947604;868.9934508
1120.143305;1403.25399;1718.332463;2065.383909
2444.412305;2855.420777;3298.411824;3773.387485
4280.349444;4819.299109;5390.237672;5993.166151];

fi=[0.383123341;-0.33576164;0.303854297;-0.281316396
0.264302806;-0.250828735;0.239781821;-0.230487337
0.222509331;-0.215551712;0.209405163;-0.203916792
0.198971848;-0.194482217;0.190378903;-0.186606964
0.183122003;-0.179887676;0.176873891;-0.174055476];

firdr=[0.323149321;-0.110741488;0.065313537;-0.04596575
0.035343074;-0.028658117;0.024074719;-0.020741415
0.01821062;-0.016225012;0.014626345;-0.013312041
0.012212739;-0.011279879;0.010478466;-0.009782646
0.009172915;-0.008634281;0.008155035;0.007725899];

for j=1:n
    coord_x=x(j);
    te=0;
    tb_e=0;
    for i=1:autovalori
        te=te+A(i)*fi(i)*exp(-landa(i)*coord_x);
        tb_e=tb_e+A(i)*(fi(i)/(2*Rw*landa(i))...
            -S1/landa(i)*firdr(i))*exp(-landa(i)*coord_x);
    end;
    tw(j)=te+1/(2*Rw)*So/S1*besselJ(0,(S1)^0.5)...
/(1/(2*Rw)*besselJ(0,(S1)^0.5)-(S1)^0.5*besselJ(1,(S1)^0.5))-So/S1;
    tb(j)=4*tb_e+1/(2*Rw)*So/S1*(8/S1)*besselJ(2,(S1)^0.5)...

```



```
/(1/(2*Rw)*besselJ(0,(S1)^0.5)-(S1)^0.5*besselJ(1,(S1)^0.5))-So/S1;
    qw(j)=-1/(2*Rw)*tw(j);
end;
hold on
%plot(x,tw)
hold on
%plot(x,tb,'k--')
plot(x,tb,'r')
hold on
%plot(x,qw,'k-')
plot(x,qw,'r')

%%%%%%%%%%
% S1^2= 1
%%%%%%%%%%
S1=1;
% in realtà coincide con quello al quadrato ! secondo la notazione nuova

A=[-10.20336717;1.182447481;-0.496358493;0.286929307
-0.192558212;0.14086408;-0.108986986;0.087699927
-0.072646693;0.061532196;-0.053044715;0.046385874
-0.041044752;0.036680729;-0.033058854;0.030012332
-0.027419799;0.025191042;-0.02325774;0.021567293];

landa=[2.461713305;31.13891546;91.10225493;182.7438386
306.2035319;461.5454421;648.8043083;868.0011393
1119.149656;1402.259342;1717.337047;2064.387889
2443.4158;2854.423874;3297.414593;3772.389978
4279.351703;4818.301167;5389.239556;5992.167884];

fi=[0.399236132;-0.338691125;0.304974006;-0.281885409
0.264640125;-0.251049024;0.239935576;-0.230599986
0.222594972;-0.215618743;0.209458876;-0.203960675
0.199008288;-0.194512897;0.190405044;-0.18662947
```

```

0.183141556;-0.179904801;0.176888998;-0.174068889];

firldr=[0.330588609;-0.109793314;0.064852912;-0.045714259
0.035188886;-0.028555461;0.024002173;-0.020687801
0.018169599;-0.016192749;0.014600393;-0.013290772
0.012195032;-0.011264939;0.010465712;-0.00977165
0.009163348;-0.008625892;0.008147626;-0.007719315];

for j=1:n
    coord_x=x(j);
    te=0;
    tb_e=0;
    for i=1:autovalori
        te=te+A(i)*fi(i)*exp(-landa(i)*coord_x);
        tb_e=tb_e+A(i)*(fi(i)/(2*Rw*landa(i))-S1...
/landa(i)*firldr(i))*exp(-landa(i)*coord_x);
    end;
    tw(j)=te+1/(2*Rw)*So/S1*besselJ(0,(S1)^0.5)...
/(1/(2*Rw)*besselJ(0,(S1)^0.5)-(S1)^0.5*besselJ(1,(S1)^0.5))-So/S1;
    tb(j)=4*tb_e+1/(2*Rw)*So/S1*(8/S1)...
*besselJ(2,(S1)^0.5)/(1/(2*Rw)*besselJ(0,(S1)^0.5)-(S1)^0.5)...
*besselJ(1,(S1)^0.5))-So/S1;
    qw(j)=-1/(2*Rw)*tw(j);
end;
hold on
%plot(x,tw)
hold on
%plot(x,tb,'k--')
plot(x,tb,'c')
hold on
%plot(x,qw,'k-')
plot(x,qw,'c')

```

## A.7 Calcolo quantità chi, delta, fi, gamma

```
function [chi,delta,fi,gamma]=principale(So,S1,Rw,Pe)

% Vedi UIT 09 per i simboli

% Calcolo autovalori
mu_upstream=calcolo_autovalori_upstream(Pe);
% qui ho una condizione di
%adiabaticità
[m,n]=size(mu_upstream');
numero_autovalori_upstream=n;

mu_downstream=calcolo_autovalori_downstream(S1,Rw,Pe);
% qui ho una condizione al contorno del terzo tipo
[m,n]=size(mu_downstream');
numero_autovalori_downstream=5;

% calcolo quantità
chi=0;
delta=0;
fi=0;
gamma=0;
for i=1:numero_autovalori_downstream
    mu_i=mu_downstream(i);
    chi(i)=integrale_chi(mu_i,So,S1,Rw,Pe);
    delta(i)=integrale_delta(mu_i,So,S1,Rw,Pe);
end

for i=1:numero_autovalori_upstream
    mu_i=mu_upstream(i);
    fi(i)=integrale_fi(mu_i,So,S1,Rw,Pe);
    gamma(i)=integrale_gamma(mu_i,So,S1,Rw,Pe);
```

---

end

## A.8 calcolo automatico autovalori regione downstream

```
function [funzione,radice,mu]=calcolo_autovalori_downstream(S1,Rw,Pe)

% dati %
n=1000;
mu_max=20;
finezza=mu_max/1000;
% equazione trascendente %
mu=linspace(0.001,mu_max,n);

funzione=0;
for i=1:n
    % f1 è la derivata
    mu_i=mu(i);

    alfa_i=1/2*(1-mu_i/2-S1/(2*mu_i)-mu_i^3/(2*Pe^2));
    a=alfa_i;
    b=1;
    c=mu_i;

    hyper1=mchgm_alternativo(a+1,b+1,c);
    hyper2=mchgm_alternativo(a,b,c);

    f1=exp(-mu_i/2)*mu_i*(a)*hyper1-exp(-mu_i/2)*mu_i*hyper2;
    f2=exp(-mu_i/2)*1/(2*Rw)*hyper2;
    g=((f1+f2));
    funzione(i)=g;
```

```
end

% ricerca (grezza) degli zeri
n=find(funzione<10^-1);
s=size(n,2);
OPTIONS = OPTIMSET([]);
radice_tutte=0;
for i=1:s
    j=n(i);
    valore_tentativo=abs(real(mu(j)));
    radice_tutte(i)=fzero(@radici_downstream,...
        valore_tentativo,OPTIONS,S1,Rw,Pe);
end

% eliminazione dei doppi in radice
radice=0;
k=1;
radice(1)=radice_tutte(1);
valore=min(s,20)
for i=1:s
    if k<valore
        a=radice(k)-radice_tutte(i);
        if abs(a)<finezza;
        else
            k=k+1;
            radice(k)=radice_tutte(i);
        end
    end
end
end
```

## A.9 Calcolo automatico autovalori upstream

```
function [radice]=calcolo_autovalori_upstream(Pe)
```

```
% dati %
n=10000;
mu_max=10;
% equazione trascendente %
mu=linspace(1,mu_max,n);

funzione=0;
for i=1:n
    i;
    % f1 è la derivata
    mu_i=mu(i);

    alfa_i=1/2*(1-(mu_i/2)*j-((mu_i)*j)^3/(2*Pe^2));
    a=alfa_i;
    b=1;
    c=(mu_i)*j;

    hyper1=KummerComplex(a+1,b+1,c);
    hyper2=KummerComplex(a,b,c);

    f1=(exp((-mu_i/2)*j)*mu_i*(alfa_i)*hyper1)*j-...
        (exp(-mu_i/2)*j)*mu_i*hyper2)*j;
    g=f1;
    funzione(i)=abs(real(g));
end
plot(funzione);
% ricerca (grezza) degli zeri
n=find(real(funzione<10^-1));
s=size(n,2);
OPTIONS = OPTIMSET([]);
radice_tutte=0;
for i=1:s
    j=n(i);
    valore_tentativo=abs(real(mu(j)));
```

```
        radice_tutte(i)=fzero(@radici_upstream, valore_tentativo, OPTIONS, Pe);
    end
    radice_tutte;
    % eliminazione dei doppioni in radice
    radice=0;
    k=1;
    radice(1)=radice_tutte(1)
    valore=min(s,20)
    s
    for i=1:s
        if k<valore
            a=radice(k)-radice_tutte(i);
            if abs(a)<10^-8;
            else
                k=k+1;
                radice(k)=radice_tutte(i);
            end
        end
    end
end
```

## A.10 Procedura iterativa per la determinazione delle costanti di separazione A e B

```
function [A,B,Bnew]=determinazione_costanti(B)

Fi=textread('Integrale F.txt');
F=0;
dim=5;
for i=1:dim
    for j=1:dim
```

---

```
        k=dim*(i-1)+j;
        F(j,i)=Fi(k);
    end;
end
F
delta=textread('delta.txt');
chi=textread('chi.txt');
gamma=textread('gamma.txt');
fi=textread('fi.txt');

A=zeros(10,1);
Bnew=zeros(10,1);
differenza=10;
iterazioni=0;

while differenza>10^-4
    for i=1:dim
        sommatoria=0;
        for j=1:dim
            sommatoria=sommatoria+B(j,1)*F(i,j);
        end
        A(i)=sommatoria/gamma(i)+fi(i)/gamma(i);
    end
    for i=1:dim
        sommatoria=0;
        for j=1:dim
            sommatoria=sommatoria+A(j)*F(j,i);
        end
        Bnew(i)=1/delta(i)*(-sommatoria)+chi(i)/delta(i);
    end
    differenza=norm(B-Bnew);
    B=Bnew;
    iterazioni=iterazioni+1;
end
```



```
iterazioni
differenza
```

## A.11 calcolo del valore locale della funzione ipergeometrica confluyente

```
function [hg]=mchgm_alternativo(a,b,x)

% =====
% Purpose: This program computes the confluent
% hypergeometric function M(a,b,x) using
% subroutine CHGM
% Input : a --- Parameter
% b --- Parameter(b <> 0,-1,-2,...)
% x --- Argument
% Output: HG --- M(a,b,x)
% Example:
% a      b      x      M(a,b,x)
% -----
% 1.5    2.0    20.0    .1208527185D+09
% 4.5    2.0    20.0    .1103561117D+12
% -1.5   2.0    20.0    .1004836854D+05
% -4.5   2.0    20.0    -.3936045244D+03
% 1.5    2.0    50.0    .8231906643D+21
% 4.5    2.0    50.0    .9310512715D+25
% -1.5   2.0    50.0    .2998660728D+16
% -4.5   2.0    50.0    -.1806547113D+13
% =====
hg=0;
```

---

```

[a,b,x,hg]=chgm(a,b,x,hg);
fprintf(1,[repmat(' ',1,1),'%5.1g',repmat(' ',1,3)...
,'%5.1g',repmat(' ',1,3),'%5.1g','%20.10g' ' \n'],a,b,x,hg);
%format(1x,f5.1,3x,f5.1,3x,f5.1,d20.10);
end
function [a,b,x,hg]=chgm(a,b,x,hg,varargin);
% =====
% Purpose: Compute confluent hypergeometric function
% M(a,b,x)
% Input : a --- Parameter
% b --- Parameter(b <> 0,-1,-2,...)
% x --- Argument
% Output: HG --- M(a,b,x)
% Routine called: GAMMA for computing  $\hat{a}(x)$ 
% =====
ta=[];tb=[];xg=[];tba=[];
pi=3.141592653589793d0;
a0=a;
a1=a;
x0=x;
hg=0.0d0;
if(b == 0.0d0|b == -abs(fix(b)));
    hg=1.0d+300;
elseif(a == 0.0d0|x == 0.0d0);
    hg=1.0d0;
elseif(a == -1.0d0);
    hg=1.0d0-x./b;
elseif(a == b);
    hg=exp(x);
elseif(a-b == 1.0d0);
    hg=(1.0d0+x./b).*exp(x);
elseif(a == 1.0d0&b == 2.0d0);
    hg=(exp(x)-1.0d0)./x;
elseif(a == fix(a)&a < 0.0d0);

```

```
m=fix(-a);
r=1.0d0;
hg=1.0d0;
for k=1:m;
    r=r.*(a+k-1.0d0)./k./(b+k-1.0d0).*x;
    hg=hg+r;
end; k=m+1;
end;

if(hg ~= 0.0d0)return; end;
if(x < 0.0d0);

a=b-a;
a0=a;
x=abs(x);
end;
if(a < 2.0d0)nl=0; end;
if(a >= 2.0d0);
    nl=1;
    la=fix(a);
    a=a-la-1.0d0;
end;

for n=0:nl;
    if(a0 >= 2.0d0)a=a+1.0d0; end;
    if(x <= 30.0d0+abs(b)|a < 0.0d0);
        hg=1.0d0;
        rg=1.0d0;
        for j=1:500;
            rg=rg.*(a+j-1.0d0)./(j.*(b+j-1.0d0)).*x;
            hg=hg+rg;
            if(abs(rg./hg)< 1.0d-15)break; end;
        end;
    else;
```

```
[a,ta]=gamma(a,ta);
[b,tb]=gamma(b,tb);
xg=b-a;
[xg,tba]=gamma(xg,tba);
sum1=1.0d0;
sum2=1.0d0;
r1=1.0d0;
r2=1.0d0;
for i=1:8;
    r1=-r1.*(a+i-1.0d0).*(a-b+i)./(x.*i);
    r2=-r2.*(b-a+i-1.0d0).*(a-i)./(x.*i);
    sum1=sum1+r1;
    sum2=sum2+r2;
end; i=8+1;
hg1=tb./tba.*x.^(-a).*cos(pi.*a).*sum1;
hg2=tb./ta.*exp(x).*x.^(a-b).*sum2;
hg=hg1+hg2;
end;
if(n == 0)y0=hg; end;
if(n == 1)y1=hg; end;
end;

if(a0 >= 2.0d0);
    for i=1:la-1;
        hg=((2.0d0.*a-b+x).*y1+(b-a).*y0)./a;
        y0=y1;
        y1=hg;
        a=a+1.0d0;
    end; i=la-1+1;
end;

if(x0 < 0.0d0)hg=hg.*exp(x0); end;
a=a1;
x=x0;
```

```
return;
end

function [x,ga]=gamma(x,ga,varargin);
% =====
% Purpose: Compute gamma function  $\hat{\alpha}(x)$ 
% Input : x --- Argument of  $\hat{\alpha}(x)$ 
%(x is not equal to 0,-1,-2,úúú)
% Output: GA ---  $\hat{\alpha}(x)$ 
% =====

g=zeros(1,26);
pi=3.141592653589793d0;
if(x == fix(x));
    if(x > 0.0d0);
        ga=1.0d0;
        m1=x-1;
        for k=2:m1;
            ga=ga.*k;
        end; k=m1+1;
    else;
        ga=1.0d+300;
    end;
else;
    if(abs(x)> 1.0d0);
        z=abs(x);
        m=fix(z);
        r=1.0d0;
        for k=1:m;
            r=r.*(z-k);
        end; k=m+1;
        z=z-m;
    else;
        z=x;
    end;
end;
```

---

```
g(:)=[1.0d0,0.5772156649015329d0,-0.6558780715202538d0...
,-0.420026350340952d-1,0.1665386113822915d0,-.421977345555443d-1...
,-.96219715278770d-2,.72189432466630d-2,-.11651675918591d-2...
,-.2152416741149d-3,.1280502823882d-3,-.201348547807d-4...
,-.12504934821d-5,.11330272320d-5,-.2056338417d-6,.61160950d-8...
,.50020075d-8,-.11812746d-8,.1043427d-9,.77823d-11,-.36968d-11...
,.51d-12,-.206d-13,-.54d-14,.14d-14,.1d-15];
gr=g(26);
for k=25:-1:1;
    gr=gr.*z+g(k);
end; k=1-1;
ga=1.0d0./(gr.*z);
if(abs(x)> 1.0d0);
    ga=ga.*r;
    if(x < 0.0d0)ga=-pi./(x.*ga.*sin(pi.*x)); end;
end;
end;
return;
end
```



# Bibliografia

- [1] Da-Wen Sun, Emerging technologies for food processing, Academic Press, 2005
- [2] R. Stirling, Ohmic heating-a new process for food industry, Power Eng 6 (1987) 365-371
- [3] M. Berthoud, F. Chopard e C. Aussudre, Heater for resistive heating of a fluid, fluid-treatment apparatus incorporating such a heater, and a method of treating a fluid by resistive heating, Word Patent No 0141509, 2001
- [4] Y. Benabderrahmane and J.P. Pain, Thermal behavior of a solid/liquid mixture in an ohmic heating sterilizer slip phase model, Chem. Eng. Sci. 55 (2000) 1371-1384.
- [5] G.L. Quarini, Thermalhydraulic aspects of the ohmic heating process, J. Food Eng. 24 (1995) 561-574.
- [6] A.A. de Alwis e P.J. Fryer, The use of direct resistance heating techniques in the food industry, J. Food. Eng 11 (1990) 3-27
- [7] I. Michiyoshi, Y. Kukuchi e O. Furukawa, Heat transfer in a fluid with internal heat generation flowing through a vertical tube, J. Nuc. Sci Tech 5[11] 1968 59-595



- [8] J. Stancl, M. Novy e R. Zitny, Temperature non-uniformities and risk of overheating at a direct ohmic heating of foods, *Appl. Mech* 4 (2008) 74-80
- [9] R. Zitny, J. Sestak, M. Dostal, M. Zajicek, Direct ohmic heating in lamiar flows in ducts, *Acta Polytechica*, 25 (1996) 71-83
- [10] A.G.A. Ghani, M.M. Farid, Using the computational fluid dynamics to analyze the thermal sterilization of solid-liquid food misture in cans, *Inn. Food Sci. Em. Techn* 7 (2006) 55-61
- [11] R.K. Shah and A.L. London, Laminar flow forced convection in ducts. In *Advances in Heat Transfer, Supplement I* (Edited by T.F. Irvine, Jr., and J.P. Hartnett), Academic Press, New York (1978).
- [12] R.K. Shah and M.S. Batti, Laminar convective heat transfer in ducts. In *Handbook of Single- Phase Convective Heat Transfer* (Edited by S. Kakas, R.K. Shah and W. Aung), Chap. 3, Wiley, New York (1987).
- [13] M.A. Ebadian and Z.F. Dong, Forced convection, internal flow in ducts. In *Handbook of Heat Transfer 3rd ed.* (Edited by W.M. Rohsenow, J.P. Hartneww and Y.I. Cho), Chap. 5, McGRaw-Hill Professional (1998).
- [14] L. Topper, Forced heat convection in cylindrical channels: some problems involving potential and parabolic velocity distribution, *Chem. Eng. Sci.* 5 (1955) 13-19.
- [15] E.M. Sparrow and R. Siegel, Laminar tube flow with arbitrary internal heat sources and wall heat transfer, *Nucl. Sci. Eng.* 4 (1958) 239-254.

- [16] T. Pessa e S. Piva, Convezione laminare con generazione interna di calore in condotti cilindrici, Atti del XXV Congresso Nazionale UIT sulla Trasmissione del Calore, Trieste, 18-20 Giugno 2007.
- [17] R.M. Inman, Experimental study of temperature distribution in laminar tube flow of a fluid with internal heat generation, *Int. J. Heat Mass Transfer* 5 (1962) 1053-1058.
- [18] L.N. Tao, On some laminar forced-convection problems, *J. Heat Transfer*, *Trans. ASME, Series C* 83 (1961) 466-472.
- [19] V.P. Tyagi, Laminar forced convection of a dissipative fluid in a channel, *J. Heat Transfer* 88 (1966) 161-169.
- [20] C. Hsu, Laminar flow heat transfer in circular or parallel-plate channels with internal heat generation and the boundary condition of the third kind, *J. Chin. Inst. Chem. Eng.* 2 (1971) 85- 100.
- [21] F.P. Foraboschi and I. Di Federico, Heat transfer in laminar flow of non-newtonian heatgenerating fluids, *Int. J. Heat Mass Transfer* 7 (1964) 315-325.
- [22] S. Mori, T. Inoue and A. Tanimoto, Heat transfer to laminar flow with temperature-dependent heat generation, *Can. J. Chem. Eng.* 55 (1977) 138-146.
- [23] S. Piva, Axial wall conduction preheating effects in high Péclet number laminar forced convection, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 39 (1996) 3511-3517.

- [24] M. Faghri and E.M Sparrow, Simultaneous wall and fluid axial conduction in laminar pipe-flow heat transfer, *J. Heat Transfer, Trans. ASME* 102 (1980) 58-63.
- [25] B.J. Barr and C.L. Wiginton, Entrance region heat transfer with axial conduction in a cylindrical tube: Constant temperature wall, *Phys. Fluids* 20 (1977) 2151-2152.
- [26] B.J. Barr and C.L. Wiginton, Entrance region heat transfer with axial conduction in a cylindrical tube: Constant temperature heat flux , *Phys. Fluids* 20 (1977) 2153-2154.
- [27] M. Abramowitz e I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions, with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, ninth ed., Dover, New York (1972).
- [28] A. Goullieux and J.P. Pain, Ohmic Heating. In *Emerging technologies for food processing* (Edited by Da Wen Sun), Chap. 18, Elsevier Academic Press, London (2005).
- [29] A.A.P. de Alwin and P.J. Fryer, Operability of the ohmic heating process: electrical conductivity effects, *J. Food Eng.* 15 (1992) 21-48.
- [30] F. Icier and C. Ilicali, Temperature dependent electrical conductivities of fruit purees during ohmic heating, *Food. Res. Int.* 38 (2005) 1135-1142.
- [31] T. Pessoa and S. Piva, Laminar forced convection of heat generating fluids in circular pipes with boundary conditions of the third kind, in preparation.
- [32] J.H. Lienhard IV e J.H. Lienhard V, *A Heat Transfer Textbook*, 3rd ed., available in web.

- [33] J. Lahjomri and A. Oubarra, Analytical solution of the Graetz problem with axial heat conduction, *J. Heat Transfer* 121 (1999) 1078-1083.
- [34] S. Piva, Axial wall conduction preheating effects in high Peclet number laminar forced convection, *International Journal of Heat and Mass Transfer* Volume 39, Issue 16, (1996), 3511-3517