Atti

DELLA ACCADEMIA ROVERETANA DEGLI AGIATI

ser. X, vol. III, B

Classe di Scienze matematiche, fisiche e naturali

CCLXXI ANNO ACCADEMICO

2021

Atti

DELLA ACCADEMIA ROVERETANA DEGLI AGIATI

CCLXXI ANNO ACCADEMICO
2021 ser. X, vol. III, B

Classe di Scienze matematiche, fisiche e naturali

SCRIPTA EDIZIONI

Claudio Fontanari e Maria Giulia Lugaresi

Un appunto autografo di Malfatti nella Biblioteca Comunale di Ala

Abstract: We present the transcription, accompanied by a short historical and mathematical comment, of a handwritten note by Gianfrancesco Malfatti (1731-1807) kept in the public library of Ala (Miscellanea MS 61, sheet 237).

Key words: Gianfrancesco Malfatti, Anton Maria Lorgna, sum of a series.

Riassunto: Si presenta la trascrizione, corredata da un breve inquadramento storico e matematico, di un appunto autografo di Gianfrancesco Malfatti (1731-1807) conservato presso la Biblioteca Comunale di Ala (Miscellanea MS 61, foglio 237).

Parole chiave: Gianfrancesco Malfatti, Anton Maria Lorgna, somma di una serie.

Introduzione

Nella Biblioteca Comunale di Ala, legato in un incartamento di documenti miscellanei relativi alla famiglia Malfatti, è conservato un foglio manoscritto contenente un appunto matematico (Miscellanea MS 61, foglio 237). La scrittura è indubbiamente quella del matematico alense Gianfrancesco Malfatti (1731-1807).

Nel panorama scientifico italiano della seconda metà del XVIII secolo Malfatti è certamente uno degli studiosi più attivi dal punto di vista della ricerca matematica. Lo testimoniano la sua ricca e variegata serie di lavori e il proficuo scambio di lettere con alcuni dei più importanti matematici italiani. Malfatti è stato uno dei membri più attivi e uno dei soci fondatori

Claudio Fontanari[1], *Maria Giulia Lugaresi*[2],
[1] Dipartimento di Matematica, Università di Trento, claudio.fontanari@unitn.it
[2] Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Ferrara, lgrmgl@unife.it.

della Società Italiana delle Scienze, istituita nel 1782 dal matematico veronese Anton Maria Lorgna (1735-1796) con lo scopo di promuovere a livello nazionale i più importanti scritti scientifici dei suoi membri. La parte più cospicua della produzione scientifica di Malfatti – 14 memorie, apparse tra il 1782 ed il 1807 – trova collocazione negli atti della Società Italiana. Il matematico alense non è solo studioso profondo, ma anche lettore attento e costantemente aggiornato sulle novità editoriali, sia a livello nazionale che internazionale, come testimonia la breve nota che qui presentiamo.

L'appunto riguarda un passaggio della memoria di Lorgna *Nuova investigazione della somma generale delle serie*, pubblicata nel Volume I (1782), p. 268 e ss., delle *Memorie di matematica e di scienze fisiche e naturali* della *Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL*. In particolare, a p. 338 Lorgna esegue il calcolo della somma di una serie trigonometrica applicando un procedimento di sostituzione di variabile non adeguatamente giustificato. Malfatti nota:

> egli pretende che l'indice x del termine generale della serie possa essere cangiato in qualche altra funzione di x, e che fatti i corrispondenti cangiamenti nella sommatoria, sia la serie trasformata eguale alla sommatoria modificata.

La critica di Malfatti è spietata ma ineccepibile:

> Per asserir ciò, conveniva che il Sig. Lorgna dimostrasse esser lecita questa sostituzione almen nel caso della sua serie. Quel che è certo si è che generalmente la proposizione non è vera; e lo provo con un facile esempio. Ognun sa, essere $1 + 2 + 3 + 4\ldots + x = \frac{x(x+1)}{2}$. Sostituisco, per esempio, x^2 in vece di x, ed avrò: $1 + 4 + 9 + 16\ldots + x^2 = \frac{x^2(x^2+1)}{2}$; il che è falsissimo, come ciascun può verificare.

Malfatti dunque non solo osserva che il procedimento non è giustificato, ma mostra anche un semplice controesempio: applicandolo alla somma dei primi numeri naturali si ottiene un risultato evidentemente sbagliato.

Malfatti segnala un ulteriore errore nella memoria di Lorgna e per supportare la sua affermazione cita una memoria di Eulero, *De valore formulae integralis* $\int \frac{z^{m-1} \pm z^{n-m-1}}{1 \pm z^n} dz$ *casu quo post integrationem ponitur* $z = 1$, apparsa nei *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, tomo XIX (1774), pp. 5–8.

Il ritrovamento del manoscritto avvenuto nell'ambito del progetto di valorizzazione di alcune figure trentine illustri "Ecoltura. Per un'ecologia della cultura", coordinato dalla prof.ssa Lucia Rodler (Progetto post-Covid di Ateneo 2021-2022, https://libguides.unitn.it/Ecoltura). Gli autori sono grati alla dott.ssa Elena Corradini (Biblioteca Comunale di Ala) per aver messo cortesemente a disposizione del progetto i documenti relativi a Malfatti conservati in biblioteca.

Trascrizione

A carte 338 del 1° tomo della Società Italiana il Sign. C. Lorgna trova la somma della serie l cos.Δ + l cos.2Δ + l cos.3Δ... + l cos.$x\Delta$ eguale alla espressione

$$\int \frac{z^{\pi/2\Delta}dz}{l.z}\frac{(1+z^{-x-1)})(1-z^{x})}{(1-z)(1-z^{\pi/\Delta})},$$

dove π esprime la semicirconferenza di raggio 1, e la sommatoria si prende in guisa che fatto $z = 0$ sia essa zero, e quindi si ponga $z = 1$. In seguito egli pretende che l'indice x del termine generale della serie possa essere cangiato in qualche altra funzione di x, e che fatti i corrispondenti cangiamenti nella sommatoria, sia la serie trasformata eguale alla sommatoria modificata. Difatto egli cangia x in $\frac{1}{2^x}$, onde nasce il termine generale della serie $l\cos.\frac{\Delta}{2^x}$, fatto $\Delta = \frac{\pi}{2}$, $l\cos.\frac{\pi}{22^x}$. Stesa quindi la serie che corrisponde a questo nuovo termine generale, e sostituita nella sommatoria $\frac{1}{2^x}$ invece di x, dice valere quest'altra equazione:

$$l\cos.\frac{\pi}{4}+l\cos.\frac{\pi}{8}+l\cos.\frac{\pi}{16}+\ldots l\cos.\frac{\pi}{2\cdot 2^x}=\int\frac{dz(1+z^{\frac{1}{2^x}+1})(1-z^{\frac{1}{2^x}})}{z^{\frac{1}{2^x}}l.z(1-z)(1-z^2)}.$$

Per asserir ciò, conveniva che il Sig. Lorgna dimostrasse esser lecita questa sostituzione almen nel caso della sua serie. Quel che è certo si è che generalmente la proposizione non è vera; e lo provo con un facile esempio. Ognun sa, essere 1 + 2 + 3 + 4... + $x = \frac{x(x+1)}{2}$. Sostituisco, per esempio, x^2 in vece di x, ed avrò: 1 + 4 + 9 + 16... + $x^2 = \frac{x^2(x^2+1)}{2}$; il che è falsissimo, come ciascun può verificare. Così se in vece di x, sostituissi $\frac{1}{2^x}$ avrei $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{2^x}=\frac{1}{2^{2x}}\frac{(1+2^x)}{2}$, che parimenti non è vero. Altro esempio colle sommatorie. La serie $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{x+1}$ ha per somma $\int\frac{zdz(1-z^x)}{1-z}$. Si cangi x in px, e avremo la serie $\frac{1}{p+1}+\frac{1}{2p+1}+\frac{1}{3p+1}+\cdots+\frac{1}{px+1}$. Dunque dovrebb'essere la somma di questa serie $=\int\frac{zdz(1-z^{px})}{1-z}$, il che è falso, perché si sa essere la sua somma $=\int\frac{z^p dz(1-z^{px})}{1-z^p}$.

A carte 352 del citato opuscolo si dice essere

$$\int \frac{(z^{p-x}+z^{p+x})}{z^{2p}-1}\frac{dzlz}{z} = \frac{\pi^2}{4p^2\cos.\pi x^2/2p} = \frac{1}{(p-x)^2}+\frac{1}{(p+x)^2}+\frac{1}{(3p-x)^2}+\&c.$$

Ciò non è vero. Dimostra il Sig. Eulero nel T. XIX de' nuovi comm. di Pietrob., essere

$$\begin{aligned}\int \frac{(z^{p-x}-z^{p+x})}{1-z^{2p}}\frac{dz}{z} &= \frac{1}{p-x}-\frac{1}{p+x}+\frac{1}{3p-x}-\frac{1}{3p+x}+\frac{1}{5p-x}-\frac{1}{5p+x}\&c.\\ &= \frac{\pi}{2p}\tan.\frac{\pi x}{2p}.\end{aligned}$$

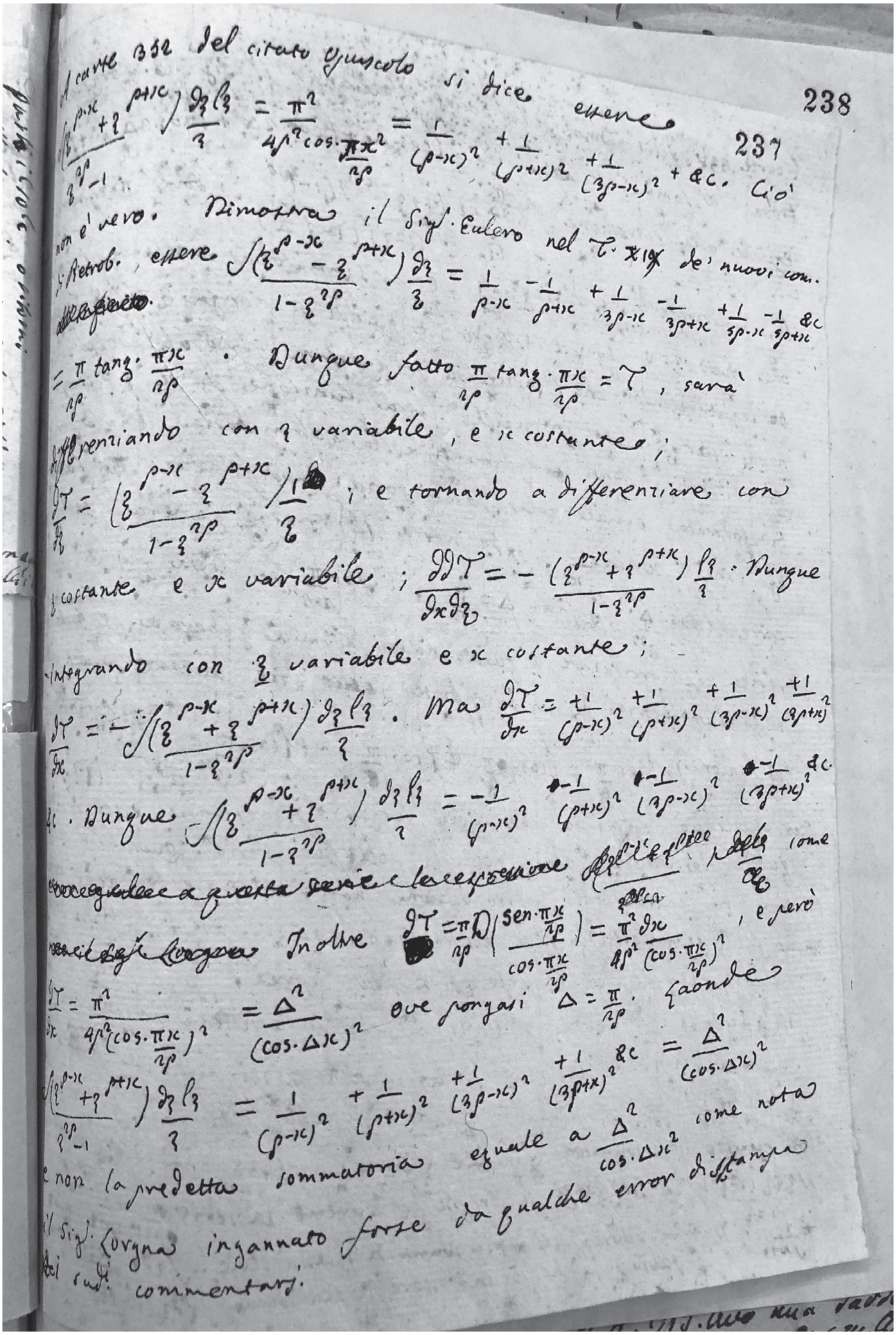
Dunque fatto $\frac{\pi}{2p}\tan\cdot\frac{\pi x}{2p}=T$, sarà differenziando con z variabile, e x costante: $\frac{\partial T}{\partial z}=\frac{(z^{p-x}-z^{p+x})}{1-z^{2p}}\frac{1}{z}$; e tornando a differenziare con z costante e x variabile: $\frac{\partial\partial T}{\partial x\partial z}=-\frac{(z^{p-x}+z^{p+x})}{1-z^{2p}}\frac{lz}{z}$. Dunque integrando con z variabile e x costante: $\frac{\partial T}{\partial x}=-\frac{(z^{p-x}+z^{p+x})}{1-z^{2p}}\frac{dzlz}{z}$. Ma $\frac{\partial T}{\partial x}=+\frac{1}{(p-x)^2}+\frac{1}{(p+x)^2}+\frac{1}{(3p-x)^2}+\frac{1}{(3p+x)^2}\&c.$ Dunque

$$-\frac{(z^{p-x}+z^{p+x})}{1-z^{2p}}\frac{dzlz}{z}=-\frac{1}{(p-x)^2}-\frac{1}{(p+x)^2}-\frac{1}{(3p-x)^2}-\frac{1}{(3p+x)^2}\&c..$$

Inoltre $\partial T=\frac{\pi}{2p}D(\frac{\sin.\pi x/2p}{\cos.\pi x/2p})=\frac{\pi^2}{4p^2}\frac{\partial x}{(\cos.\pi x/2p)^2}$, e però $\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{4\pi^2}{4p^2(\cos.\pi x/2p)^2}=\frac{\Delta^2}{(\cos.\Delta x)^2}$ ove pongasi $\Delta=\frac{\pi}{2p}$. Laonde

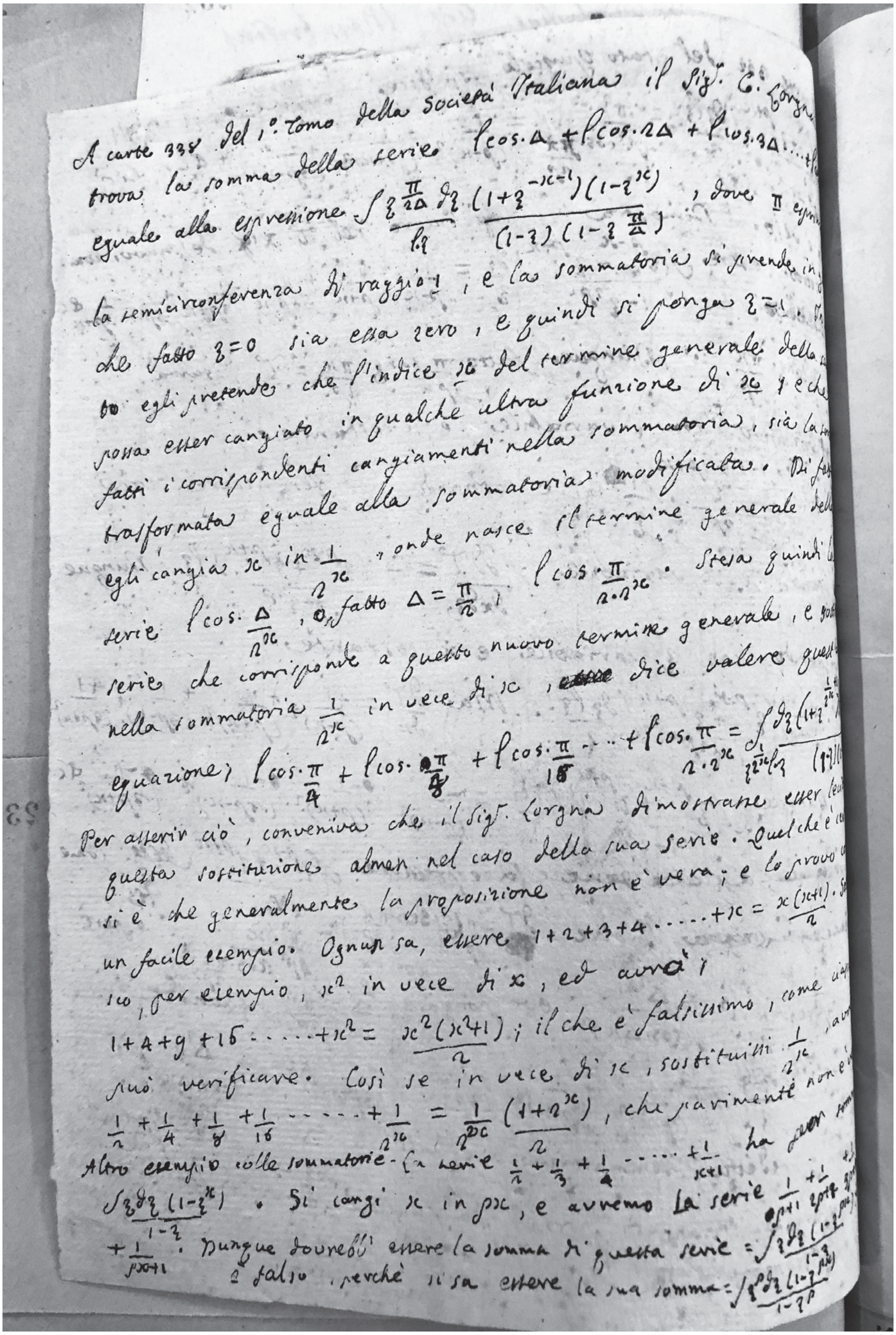
$$\frac{(z^{p-x}+z^{p+x})}{z^{2p}-1}\frac{dzlz}{z}=\frac{1}{(p-x)^2}+\frac{1}{(p+x)^2}+\frac{1}{(3p-x)^2}+\frac{1}{(3p+x)^2}\&c.=\frac{\Delta^2}{(\cos.\Delta x)^2}$$

e non la predetta sommatoria eguale a $\frac{\Delta^2}{\cos.\Delta x^2}$ come nota il Sig. Lorgna ingannato forse da qualche error di stampa dei sud.i commentarj.


238

237

A carte 352 del citato opuscolo si dice essere $\int\left(\frac{z^{p-x}+z^{p+x}}{z^{2p}-1}\right)\frac{dz\,lz}{z} = \frac{\pi^2}{4p^2\cos.\frac{\pi x}{2p}^2} = \frac{1}{(p-x)^2}+\frac{1}{(p+x)^2}+\frac{1}{(3p-x)^2}+\&c.$ Ciò non è vero. Dimostra il Sig.r Eulero nel T. XIV de' nuovi com. di Petrob. essere $\int\left(\frac{z^{p-x}-z^{p+x}}{1-z^{2p}}\right)\frac{dz}{z} = \frac{1}{p-x}-\frac{1}{p+x}+\frac{1}{3p-x}-\frac{1}{3p+x}+\frac{1}{5p-x}-\frac{1}{5p+x}\&c = \frac{\pi}{2p}\,\mathrm{tang.}\frac{\pi x}{2p}$. Dunque fatto $\frac{\pi}{2p}\,\mathrm{tang.}\frac{\pi x}{2p} = T$, sarà differenziando con z variabile, e x costante; $\frac{dT}{dz} = \left(\frac{z^{p-x}-z^{p+x}}{1-z^{2p}}\right)\frac{1}{z}$; e tornando a differenziare con z costante e x variabile; $\frac{ddT}{dx\,dz} = -\left(\frac{z^{p-x}+z^{p+x}}{1-z^{2p}}\right)\frac{lz}{z}$. Dunque integrando con z variabile e x costante; $\frac{dT}{dx} = -\int\left(\frac{z^{p-x}+z^{p+x}}{1-z^{2p}}\right)\frac{dz\,lz}{z}$. Ma $\frac{dT}{dx} = \frac{+1}{(p-x)^2}+\frac{+1}{(p+x)^2}+\frac{+1}{(3p-x)^2}+\frac{+1}{(3p+x)^2}\&c.$ Dunque $\int\left(\frac{z^{p-x}+z^{p+x}}{1-z^{2p}}\right)\frac{dz\,lz}{z} = -\frac{1}{(p-x)^2}-\frac{1}{(p+x)^2}-\frac{1}{(3p-x)^2}-\frac{1}{(3p+x)^2}\&c.$ ~~[illegible]~~ come ~~[illegible]~~ Inoltre $\frac{dT}{dx} = \frac{\pi}{2p}D\left(\frac{\mathrm{sen.}\frac{\pi x}{2p}}{\cos.\frac{\pi x}{2p}}\right) = \frac{\pi^2\,dx}{4p^2\left(\cos.\frac{\pi x}{2p}\right)^2}$, e però $\frac{dT}{dx} = \frac{\pi^2}{4p^2\left(\cos.\frac{\pi x}{2p}\right)^2} = \frac{\Delta^2}{(\cos.\Delta x)^2}$ ove pongasi $\Delta = \frac{\pi}{2p}$. Laonde $\int\left(\frac{z^{p-x}+z^{p+x}}{z^{2p}-1}\right)\frac{dz\,lz}{z} = \frac{1}{(p-x)^2}+\frac{1}{(p+x)^2}+\frac{1}{(3p-x)^2}+\frac{1}{(3p+x)^2}\&c = \frac{\Delta^2}{(\cos.\Delta x)^2}$ come nota e non la predetta sommatoria eguale a $\frac{\Delta^2}{\cos.\Delta x^2}$ il Sig.r Corgna ingannato forse da qualche error di stampa nei sud.i commentarj.



A carte 338 del 1.° tomo della Società Italiana il Sig.r C. Lorgna
trova la somma della serie $l\cos.\Delta + l\cos.2\Delta + l\cos.3\Delta \ldots + l$
eguale alla espressione $\int \frac{z^{\frac{\pi}{2\Delta}} dz}{lz} \frac{(1+z^{-x-1})(1-z^{x})}{(1-z)(1-z^{\frac{\pi}{\Delta}})}$, dove π esprime
la semicirconferenza di raggio 1, e la sommatoria si prende in
che fatto $z=0$ sia essa zero, e quindi si ponga $z=1$. Or
to egli pretende che l'indice x del termine generale della
possa esser cangiato in qualche altra funzione di x, e che
fatti i corrispondenti cangiamenti nella sommatoria, sia la
trasformata eguale alla sommatoria modificata. Di fatt
egli cangia x in $\frac{1}{2^x}$, onde nasce il termine generale della
serie $l\cos.\frac{\Delta}{2^x}$, o, fatto $\Delta = \frac{\pi}{2}$, $l\cos.\frac{\pi}{2\cdot 2^x}$. Stesa quindi la
serie che corrisponde a questo nuovo termine generale, e post
nella sommatoria $\frac{1}{2^x}$ in vece di x, dice valere quest
equazione, $l\cos.\frac{\pi}{4} + l\cos.\frac{\pi}{8} + l\cos.\frac{\pi}{16} \ldots + l\cos.\frac{\pi}{2\cdot 2^x} = \int \frac{dz(1+z^{\frac{1}{2^x}})}{z^{\frac{1}{2^x}} lz \ (1+z)(}$
Per asserir ciò, conveniva che il Sig.r Lorgna dimostrasse esser lecit
questa sostituzione almen nel caso della sua serie. Qual che è cer
si è che generalmente la proposizione non è vera; e lo provo co
un facile esempio. Ognun sa, essere $1+2+3+4\ldots+x = \frac{x(x+1)}{2}$. So
sco, per esempio, x^2 in vece di x, ed avrò
$1+4+9+16\ldots+x^2 = \frac{x^2(x^2+1)}{2}$; il che è falsissimo, come cias
può verificare. Così se in vece di x, sostituissi $\frac{1}{2^x}$, avrei
$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \ldots + \frac{1}{2^x} = \frac{1}{2^x} \frac{(1+2^x)}{2}$, che parimente non è v
Altro esempio colle sommatorie. La serie $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \ldots + \frac{1}{x+1}$ ha per somma
$\int \frac{z dz (1-z^x)}{1-z}$. Si cangi x in px, e avremo la serie $\frac{1}{p+1} + \frac{1}{2p+1} + \ldots$
$+ \frac{1}{px+1}$. Dunque dovrebb'essere la somma di questa serie $= \int \frac{z dz (1-z^{px})}{1-z}$
è falso, perchè si sa essere la sua somma $= \int \frac{z^p dz (1-z^{px})}{1-z^p}$

ISSN 1124-0350