

# Valutazioni standardizzate di matematica: evidenze di difficoltà dalla scuola primaria alla scuola secondaria di secondo grado

## Standardized assessment in Mathematics: highlights of difficulties from primary school to upper secondary school

Federica Ferretti

Facoltà di Scienze della Formazione, Libera Università di Bolzano – Italia

**Sunto** / Il presente contributo mostra l'analisi di due quesiti rientranti nelle valutazioni standardizzate italiane di matematica: uno somministrato in modalità cartacea agli studenti della classe quinta della scuola primaria e uno somministrato in modalità CBT-Computer Based Testing a studenti della classe seconda della scuola secondaria di secondo grado. L'analisi combinata dei testi e dei risultati dei quesiti evidenzia delle lacune diffuse in termini di mancanza di padronanza contestuale, concettuale e semantica della situazione problematica proposta nei task matematici.

Parole chiave: valutazioni standardizzate; valutazione in matematica; valutazioni al computer; contratto didattico.

**Abstract** / The present contribution shows analysis of standardized Italian mathematics assessments tasks: a Paper&Pencil task administered to students in the fifth grade of Primary School and a task administered in CBT-Computer Based Testing mode to second year students of upper secondary school. The combined analysis of the texts and the results of the questions highlights widespread gaps in terms of lack of contextual, conceptual and semantic mastery of the problematic situation in the resolution of math-ematical tasks.

Keywords: standardized assessment; assessment in mathematics; Computer Based Testing; didactic contract.

## 1 Introduzione

---

Negli ultimi decenni sempre più ricerche hanno studiato fenomeni messi in luce dalle valutazioni standardizzate di matematica, indagandone peculiarità e caratteristiche con le lenti teoriche della didattica della matematica (De Lange, 2007; Sbaragli & Franchini, 2014; Ferretti & Bolondi, 2019). In particolare, nel contesto italiano, analisi qualitative e quantitative sui testi e sui risultati delle rilevazioni INVALSI hanno portato alcuni contributi significativi per la ricerca in didattica della matematica: non solo è stato possibile quantificare e misurare la portata di diversi fenomeni già studiati in letteratura inquadrabili con costrutti condivisi a livello internazionale – come ad esempio quello di *contratto didattico* (Ferretti, Giberti & Lemmo, 2018), ma dalle varie analisi sono emerse nuove evidenze e interpretazioni legate ai fenomeni stessi. Da quest'ultimo punto di vista, si è potuto mettere in relazione conoscenze, abilità e difficoltà degli studenti emerse durante la prova con il gender gap tra maschi e femmine (Bolondi, Ferretti & Giberti, 2018; Bolondi, Cascella & Giberti, 2017); si sono anche studiati fenomeni nuovi come l'effetto "Età della Terra", che mette in evidenza come gli studenti tendenzialmente non ritengano plausibile che la risposta a un task matematico sia un dato esplicitamente presente nel testo del task, ma occorra "farci qualcosa"

per ottenere un risultato diverso dall'input iniziale (Ferretti & Bolondi, 2019).

Dall'anno scolastico 2017/18 le prove INVALSI del grado 08 (classe terza della scuola secondaria di primo grado<sup>1</sup>), del grado 10 (classe seconda della scuola secondaria di secondo grado<sup>2</sup>) e, dall'anno scolastico 2018/19, del grado 13 (ultimo anno della scuola secondaria di secondo grado) si sono svolte in modalità Computer Based Testing (CBT). Il passaggio dal cartaceo al CBT ha comportato tutta una serie di cambiamenti, sia dal punto di vista contenutistico, sia dal punto di vista tecnico (Botta & Lasorsa, 2017; Pozio & Bolondi, 2019). Tra questi cambiamenti, un aspetto significativo riguarda la correzione centralizzata dei quesiti svolti a livello censuario nazionale. Con la correzione centralizzata è possibile avere un'analisi più efficace delle risposte fornite dagli studenti di tutta Italia. Il grande cambiamento risiede nella raccolta delle risposte fornite alle domande aperte da tutti gli studenti a livello nazionale (domande aperte a risposta univoca e a risposta aperta argomentativa); in precedenza, tale raccolta veniva svolta autonomamente dall'insegnante o, nel caso di classi campione, dal somministratore INVALSI. Dal punto di vista della ricerca, la correzione centralizzata consente invece un'analisi dei processi (e non solo dei prodotti) attivati dagli studenti in sede di valutazione standardizzata. In questo articolo proporrò un'analisi in verticale dei risultati di due quesiti INVALSI somministrati agli studenti di scuola primaria<sup>3</sup> e di scuola secondaria di secondo grado. Le analisi di entrambi i quesiti evidenziano alcune difficoltà metacognitive che risultano diffuse a livello nazionale e che erano già state messe in evidenza dalla letteratura.

Il primo quesito è stato somministrato in forma cartacea agli allievi di quinta primaria; è un quesito a risposta chiusa che ha riscontrato una bassa percentuale di risposte corrette mettendo in evidenza la presenza di una difficoltà generalizzata; essendo un quesito a risposta chiusa è possibile analizzare le percentuali di scelta anche delle opzioni sbagliate e questo permette di avere una quantificazione anche della tipologia degli errori commessi dagli studenti. Il secondo item analizzato è a risposta aperta univoca ed è stato somministrato in modalità CBT. In questo secondo caso, l'aver a disposizione tutte le risposte fornite (e non solo le loro numerosità), sia corrette sia errate, su scala nazionale, ha permesso un grado più dettagliato di indagine sugli errori. L'analisi condotta sul secondo item sembra essere esplicativa dei vantaggi derivanti dalla somministrazione delle prove al computer e, quindi, dalla correzione centralizzata; infatti, fino a quando le prove standardizzate si svolgevano unicamente in modalità cartacea, per quanto riguarda le domande a risposta aperta e a risposta aperta univoca si avevano a disposizione solo le percentuali di risposte corrette/mancanti/errate e non le risposte fornite dagli studenti.

Entrambi i quesiti analizzati hanno registrato percentuali di risposta corrette molto basse e analizzando le risposte errate (che nel primo caso corrispondono alle scelte delle opzioni errate e nel secondo caso alle risposte errate fornite) emerge che la maggior parte delle difficoltà diffuse sono riconducibili ad una mancanza di controllo semantico della situazione e a fattori che più che riconducibili a singoli contenuti, potrebbero essere legati ad atteggiamenti e convinzioni nei confronti della matematica, e più nello specifico, alla risoluzione di task matematici.

1. La scuola secondaria di primo grado in Italia dura tre anni e corrisponde ai primi tre anni di scuola media nel Canton Ticino.

2. La scuola secondaria di secondo grado in Italia dura cinque anni e corrisponde all'ultimo anno di scuola media e alla scuola media superiore o alle scuole professionali nel Canton Ticino.

3. La scuola primaria in Italia equivale alla scuola elementare nel Canton Ticino.

## 2 La valutazione in matematica

---

Il tema della valutazione in matematica è sempre più al centro di forti dibattiti nazionali e internazionali all'interno della ricerca in didattica della matematica. C'è ormai un forte consenso sul fatto che valutare non significhi dare giudizi o classificare; la valutazione viene identificata piuttosto con i verbi ricercare, ottenere, organizzare e restituire informazioni (Bolondi, 2018). Si sta cioè sempre più affermando il ruolo formativo della valutazione, in un'ottica di valutazione *per* l'apprendimento e non *dell'*apprendimento (Scriven, 1967). Con il termine *formative assessment* (valutazione formativa) ci si riferisce a una valutazione che analizza e ricostruisce il percorso di insegnamento e apprendimento (Vertecchi, 1976) ed è proprio in questa direzione che vertono i più recenti studi in ambito docimologico, nei quali viene messo in luce quanto la valutazione dovrebbe premettere un monitoraggio e una regolazione costante dei percorsi didattici, in vista del raggiungimento degli obiettivi curriculari (Vannini, 2009). Da questa necessità teorica è nata l'importanza di costruire dispositivi e tecniche di *formative assessment* anche in ambito matematico, come messo in luce in diversi studi (Black & Wiliam, 1998; Ferretti & Vannini, 2017).

D'altra parte, il ruolo centrale della valutazione in matematica nelle prassi didattiche emerge anche dalle Indicazioni Nazionali curriculari per il primo ciclo e per la Scuola dell'Infanzia (MIUR, 2012)<sup>4</sup>, nelle quali viene messo in evidenza come il processo valutativo venga affidato a tre attori principali: gli insegnanti, le singole istituzioni scolastiche e le istituzioni ministeriali (come l'ente di ricerca INVALSI). In altre parole, i tre livelli su cui deve essere effettuata la valutazione sono: il livello *micro*, in riferimento all'apprendimento degli allievi; il livello *meso*, inteso come prassi di autovalutazione del singolo istituto; e il livello *macro*, in riferimento al controllo e al miglioramento continuo del sistema. Ovviamente questi livelli sono strettamente in relazione l'uno con l'altro e spesso anche gli attori coinvolti sono i medesimi.

Certamente, le funzioni, gli scopi e le prassi valutative sono strettamente legate a contesti storici e a fattori epistemologici, nonché ai sistemi educativi di cui sono parti integranti. Discutere di valutazione in questo momento storico non può quindi prescindere dai sistemi di valutazione di tipo macro, dunque anche dalle prove standardizzate. Tali prove rappresentano la novità più importante degli ultimi dieci anni in quanto generatrice di cambiamenti significativi nel modo in cui vengono analizzati i processi di insegnamento/apprendimento della matematica. È proprio su tali riflessioni che verterà questo articolo, in cui vengono proposte interpretazioni che ricercatori e insegnanti possono sfruttare in un'*ottica formativa*. Infatti, se da un lato uno dei principali obiettivi del Sistema Nazionale di Valutazione SNV – INVALSI consiste nell'ottenere una fotografia del sistema scolastico (fornita dall'analisi campionaria), dall'altro la somministrazione a livello censuario e le modalità di restituzione dei risultati alle singole istituzioni scolastiche permettono a dirigenti, insegnanti e studenti di poter utilizzare i singoli risultati di istituto per ottenere informazioni utili e trasformarle in elementi efficaci in termini di miglioramento nei percorsi di insegnamento/apprendimento.

---

4. Il primo ciclo nel sistema scolastico italiano corrisponde ai cinque anni di scuola primaria e ai tre anni di scuola secondaria di primo grado.

### 3 Le prove standardizzate di matematica in ottica formativa

---

Uno dei fattori che attribuisce valenza dal punto di vista didattico alle prove INVALSI è l'essere in linea sia con le normative ministeriali (MIUR, 2012; MIUR, 2010a; MIUR, 2010b; MIUR, 2010c)<sup>5</sup> sia con i principali risultati delle ricerche nazionali e internazionali in didattica della matematica. Da un lato il Quadro di Riferimento delle prove INVALSI di Matematica – così come avviene per quello delle rilevazioni internazionali IEA-TIMSS e OECD-PISA – è costruito partendo dai risultati della ricerca in didattica della matematica. Dall'altro, i quesiti vertono su conoscenze e competenze richieste dai curriculum scolastici e spesso indagano difficoltà messe in luce dalla letteratura. Inoltre, gli item sono formulati seguendo modalità validate dalla ricerca e i *question intent* delle domande sono individuati tenendo conto dei nodi che la ricerca ha messo in luce.

Come esplicitato nel Quadro di Riferimento delle prove INVALSI di matematica (INVALSI, 2018), le indicazioni ministeriali per i curricula del primo e del secondo ciclo sono alla base del disegno delle rilevazioni INVALSI, sia per quanto riguarda la definizione dei contenuti irrinunciabili, sia per quanto riguarda le competenze essenziali che gli studenti devono raggiungere in matematica al termine dei vari cicli scolastici. In linea con le normative curricolari, le prove di matematica si articolano nei medesimi ambiti di contenuto delle indicazioni ministeriali (talvolta etichettati con diverse nominazioni ma individuabili chiaramente come contenuti specifici) e fanno riferimento ai Traguardi per lo sviluppo delle competenze per il primo ciclo e alle competenze esplicitamente richieste nei documenti ministeriali per il secondo ciclo. Inoltre, la continuità del processo di apprendimento ricopre un ruolo fondamentale nel processo di costruzione delle prove, e questo si manifesta nella forte continuità sia in termini di conoscenze e abilità sia in termini di competenze, le quali si articolano come integrazione o come riformulazione nel passaggio tra due gradi scolastici. È proprio in questa direzione che il gruppo di lavoro INVALSI di matematica ha individuato una serie di Traguardi per lo sviluppo delle competenze per la scuola secondaria di secondo grado (si rimanda all'allegato A del QdR, INVALSI, 2018). Il gruppo di lavoro ha anche esplicitato per il secondo ciclo una serie di descrizioni dei traguardi, in verticale con quelli del primo ciclo, a cui riferire gli obiettivi di apprendimento e che risultano coerenti con i traguardi degli Assi Culturali (MIUR, 2007). Come viene sottolineato anche dal gruppo di lavoro INVALSI, non tutte le competenze delle Indicazioni per il primo ciclo sono valutabili da una prova standardizzata su larga scala; ad esempio, questo tipo di prove non è adeguato a valutare il Traguardo per lo sviluppo delle competenze «Sviluppa un atteggiamento positivo rispetto alla matematica» (MIUR, 2012).

Un ulteriore aspetto da tenere in considerazione, riguardante il legame fra la ricerca in didattica della matematica e le prove standardizzate, è dato dal prendere in considerazione come l'apprendimento (e dunque la valutazione dell'apprendimento) della matematica possa essere interpretato in modo olistico come formato da diverse

---

5. In Italia, per il secondo ciclo di istruzione, che corrisponde alla scuola secondaria di secondo grado, vi sono le Linee Guida per gli Istituti Professionali e Tecnici e le Indicazioni Nazionali per i Licei; questi documenti ministeriali hanno impianti di scrittura molto diversi tra di loro e sono stati redatti in tempi diversi. Entrambi però (come anche le Indicazioni Nazionali per la scuola dell'infanzia e per il primo ciclo) fanno riferimento agli Assi Culturali per l'Obbligo di istruzione, e contengono (le Indicazioni Nazionali in forma discorsiva e le Linee Guida in forma elencatoria) obiettivi di apprendimento che si riferiscono ai traguardi previsti dagli Assi Culturali.

componenti. Fandiño Pinilla (2008) ne identifica cinque: apprendimento concettuale; apprendimento algoritmico; apprendimento di strategie; apprendimento comunicativo; apprendimento e gestione delle trasformazioni semiotiche. L'importanza della valutazione in tutte le direzioni che compongono l'apprendimento della matematica viene esplicitata anche nella direzione trasversale ai contenuti delle prove INVALSI, raggruppate secondo le tre dimensioni *Risolvere problemi*, *Argomentare*, *Conoscere*. Queste tre dimensioni coinvolgono sostanzialmente le cinque componenti dell'apprendimento identificate da Fandiño Pinilla.

I risultati delle prove possono essere analizzate sotto diversi punti di vista sia da ricercatori sia da docenti; in particolare, l'analisi combinata dei risultati e dei testi effettuata con lenti teoriche specifiche può fornire informazioni preziose sul sistema scolastico in generale, sia sugli apprendimenti degli studenti.

## 4 Prospettive teoriche di indagine

---

Questa ricerca si inserisce all'interno di una prospettiva sociocostruttivista in cui le funzioni cognitive si formano in relazione al contesto e sono descritte come prodotti di interazioni sociali e, quindi, strettamente connesse ad esse. Il processo di apprendimento non può essere separato dal contesto interattivo in cui si inserisce, definito sulla base di tre componenti: gli studenti, l'insegnante e il sapere (Chevallard, 1985). In quest'ottica interazionista, per indagare le cause del fenomeno emerso dalle analisi in oggetto, una buona chiave di lettura è data dal costrutto di contratto didattico nel senso di Brousseau (Brousseau, 1990; EMS-EC, 2012). Questo costrutto, ampiamente considerato come fondazionale della didattica della matematica, risulta condiviso a livello internazionale (Sarrazy, 1995), e si presta ad interpretare molteplici situazioni d'aula in cui sono coinvolti tutti e tre gli attori della situazione didattica (Brousseau, 1997). Come mostrano alcune ricerche a diffusione internazionale (si veda, a titolo di esempio, Ferretti & Bolondi, 2019), questo costrutto offre possibili chiavi di lettura e ipotesi interpretative anche a fenomeni emersi in sede di valutazione standardizzata. L'introduzione di questo costrutto è avvenuta grazie agli studi di Brousseau del 1976, nei quali si indagavano le cause del fallimento elettivo in matematica. Il contratto didattico è definito come l'insieme dei comportamenti dell'insegnante attesi dallo studente e l'insieme dei comportamenti dello studente attesi dall'insegnante (Brousseau, 1980). Per comprendere a fondo questa idea non si può prescindere dall'approccio sistemico che ha condotto la sua definizione, approccio fortemente influenzato dalla dimensione socio-cognitiva in cui si inserisce (Sarrazy, 1995). Il contratto didattico regola, manifestandosi con diverse sfaccettature e coinvolgendo i tre attori della situazione didattica coinvolti, le attività didattiche che si instaurano in aula e ha inevitabilmente delle ricadute sul processo di apprendimento degli studenti. Le norme e le clausole determinate dal contratto didattico regolano le pratiche didattiche; pur essendo spesso implicite, vengono fortemente interiorizzate, influenzando il processo di insegnamento/apprendimento. Queste influenze non sono necessariamente negative; certo è che, quando lo sono, possono avere significative ricadute in termini di insegnamento/apprendimento. Nonostante questo costrutto nasca per inquadrare fenomeni didattici emersi in ambito di scuola primaria, diversi studi hanno evidenziato la sua rilevanza anche per interpretare fe-

nomeni in livelli scolastici superiori (D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani & Sarrazy, 2010; De Vleeschouwer & Gueudet, 2011) e in situazioni di valutazione su larga scala (Ferretti et al., 2018).

Come già esplicitato, il focus dei quesiti oggetto di questo articolo riguarda la comprensione e la risoluzione di situazioni problematiche in sede di valutazione standardizzata. In questa direzione, una definizione che offre basi e categorie per possibilità interpretative è la definizione di *literacy* matematica presente nel quadro di riferimento delle valutazioni standardizzate OCSE-PISA, definita come:

«la capacità di una persona di formulare, utilizzare e interpretare la Matematica in svariati contesti. Tale competenza comprende la capacità di ragionare in modo matematico e di utilizzare concetti, procedure, dati e strumenti di carattere matematico per descrivere, spiegare e prevedere fenomeni. Aiuta gli individui a riconoscere il ruolo che la Matematica gioca nel mondo, a operare valutazioni e a prendere decisioni fondate che consentano loro di essere cittadini impegnati, riflessivi e con un ruolo costruttivo».

(OECD, 2013, p. 25)

La figura seguente (Figura 1) mostra una panoramica dei principali elementi del ciclo della matematizzazione dell'attuale quadro di riferimento OECD-PISA e indica le relazioni esistenti tra essi.

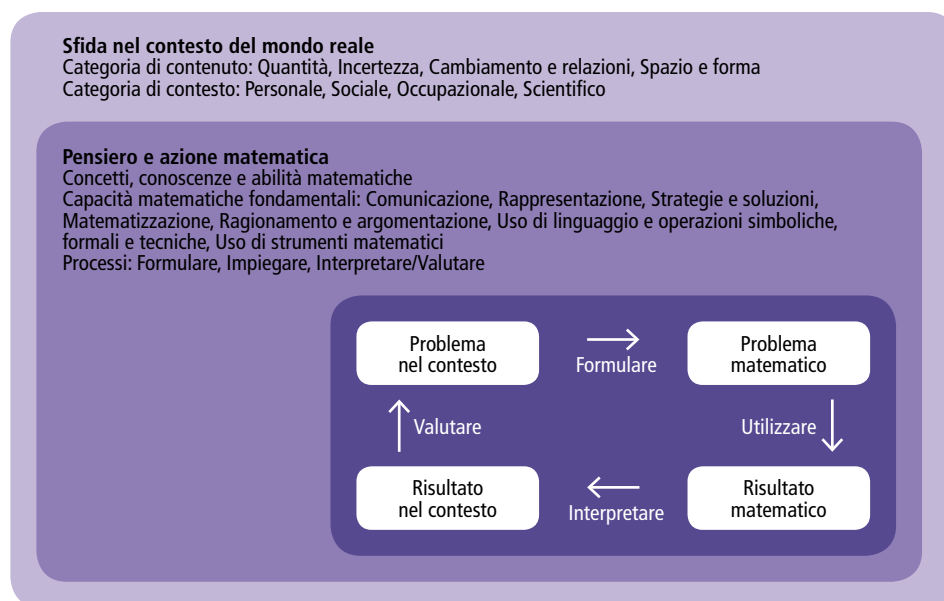


Figura 1  
Il ciclo della matematizzazione (OECD, 2013, p. 26).


Il ciclo della matematizzazione comprende due processi di *matematizzazione orizzontale* che vengono definiti come il processo di *formulare* e quello di *interpretare*, e due processi di matematizzazione verticale che vengono definiti come *utilizzare* e *valutare*. Seguendo la definizione di *literacy* matematica, i primi tre verbi sopracitati si riferiscono ai processi in cui sono impegnati gli studenti durante la risoluzione di problemi. In particolare, nella fase *formulare* lo studente parte da una situazione così come si presenta nel contesto reale e la trasforma in una forma trattabile utilizzando un modello matematico (ad esempio un'equazione, una funzione, un grafico ecc.). Nella fase *utilizzare*, lo studente lavora sul modello matematico utilizzando

ragionamenti matematici, concetti e procedure, eseguendo calcoli, manipolando espressioni algebriche, equazioni o altri modelli. Nella fase *interpretare* lo studente riflette sulle soluzioni matematiche che ha trovato e interpreta i risultati nel contesto della situazione problematica. Per fare ciò deve saper valutare i processi, le soluzioni e le argomentazioni ed essere in grado di determinare se e quanto i risultati siano ragionevoli in quel contesto. Come vedremo dall'analisi seguente, il ciclo della matematizzazione fornisce una buona chiave di lettura per diversi fenomeni emersi dalle prove standardizzate (si veda ad esempio Franchini, Lemmo & Sbaragli, 2017): anche in questa ricerca, i *question intent* delle domande e le risposte degli studenti si "posizionano" nelle diverse fasi del ciclo della matematizzazione e mettono in luce difficoltà specifiche in relazione ad esse.

## 5 Un esempio dalle prove INVALSI cartacee

La seguente domanda (Figura 2) è stata somministrata nell'anno 2016 a livello nazionale a tutti gli studenti italiani frequentanti la classe quinta della scuola primaria. Il campione è di 553'659 studenti.

**D18. Il camion che vedi in figura può trasportare al massimo 10 automobili.**



**In fabbrica sono pronte 62 automobili da consegnare.  
Qual è il numero minimo di camion, come quello in figura, necessario per consegnarle tutte?**

A.  6  
B.  7  
C.  6,2  
D.  10

Figura 2  
Quesito 18, Prova INVALSI  
2016, Grado 05.

Nel testo del quesito viene presentato un contesto con il supporto di una rappresentazione grafica. Poiché ciascun camion trasporta 10 automobili, il numero necessario di camion per trasportare 62 automobili è 7; il quesito si ispira ai risultati di una ricerca effettuata da Schoenfeld (1987). In questa ricerca condotta negli Stati Uniti il ricercatore sottopose un problema simile a quello indagato in questa sezione e giun-



se alla conclusione che pochissimi studenti “osano” scrivere qualche cosa di diverso da quello ottenuto formalmente dall’operazione, rileggendo quindi il senso della domanda. Tale problema è stato poi ripreso in seguito da D’Amore e Martini (1997) che hanno analizzato nuovamente la situazione, somministrando la prova a diversi livelli scolastici e lasciando liberi gli studenti di scegliere se utilizzare la calcolatrice. I risultati hanno mostrato che anche con variabili didattiche diverse la situazione non cambia, anzi peggiora.

Vediamo ora cosa accade nel quesito proposto nel 2016.

Il grafico seguente (Figura 3), mostra le percentuali di risposte corrette, mancate e non valide a livello nazionale e le percentuali di scelta di ciascuna opzione di risposta.

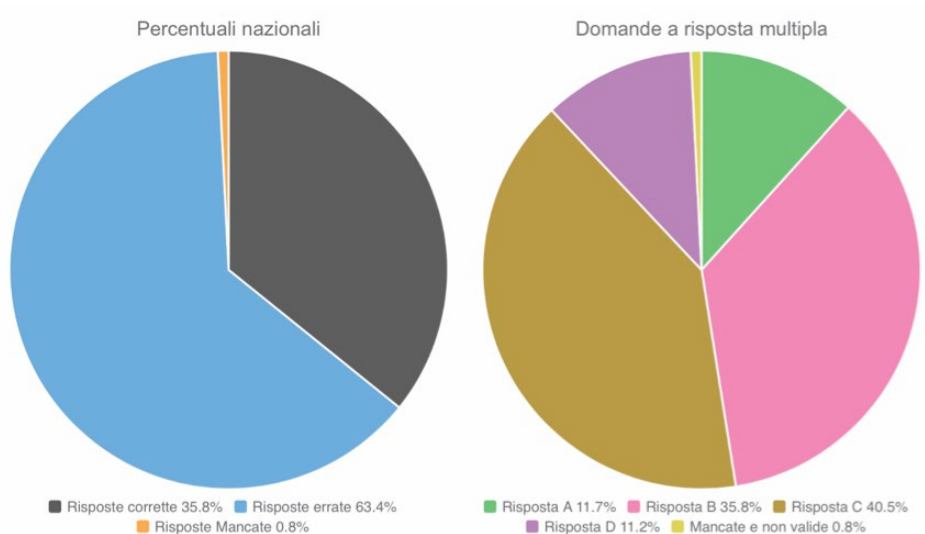


Figura 3  
Percentuali nazionali in riferimento al Quesito 18, Prova INVALSI 2016, Grado 05.<sup>6</sup>

6

Come si evince dalle percentuali dal grafico soprastante, il 35,8% degli allievi ha fornito la risposta corretta. Le percentuali di risposte mancate e non valide sono molto basse e non raggiungono l’1%. Quasi i due terzi dei bambini che hanno sbagliato, più del 40% del totale, ha scelto l’opzione C. La risposta contenuta nell’opzione C è 6,2, cioè il numero ottenuto dalla divisione di 62 (il numero di automobili) per 10 (il numero di camion). In riferimento al ciclo della matematizzazione, questa risposta si posiziona nel lato *interpretare*; infatti, si può ipotizzare che gli studenti che scelgono la risposta 6,2 abbiano “formulato” correttamente la situazione in termini matematici e “utilizzato” correttamente i dati, eseguendo in modo corretto l’operazione matematica. La difficoltà risiede nell’interpretazione e nella validazione del dato ottenuto nel contesto della situazione proposta; come mostra la letteratura, queste fasi, proprie del processo di risoluzione dei problemi, risultano spesso assenti nei procedimenti risolutivi messi in atto dagli studenti. Tale comportamento mette in evidenza come il fenomeno messo in luce da Schoenfeld fin dal 1987 tramite un problema analogo, sia ancora presente e assai diffuso attualmente. Sembra ancora che lo studente non si senta autorizzato a scrivere qualche cosa che non appare

6. I dati sono ricavati dal sito [www.gestinv.it](http://www.gestinv.it). GESTINV è il database delle prove INVALSI che contiene tutte le domande delle prove INVALSI dal 2008; dentro al database è possibile effettuare ricerche per diversi parametri quali ambito di contenuto, parole chiave, riferimenti alle Indicazioni Nazionali, percentuali di risposte corrette, sbagliate e mancanti, parametri statistici.



nei calcoli eseguiti e non controlli semanticamente la coerenza del risultato con la domanda. La causa di questo comportamento viene riletta come una clausola di contratto didattico, chiamata *delega formale*, definita nel modo seguente:

«Lo studente legge il testo, decide l'operazione da effettuare ed i numeri con i quali deve operare; a quel punto scatta, appunto, la clausola di *delega formale*: non tocca più allo studente ragionare e controllare. Sia che faccia i calcoli a mano, *tanto più* se fa uso della calcolatrice, si instaura quella clausola che [...] disimpegna le facoltà razionali, critiche, di controllo: l'impegno dello studente è finito ed ora tocca all'algoritmo o meglio ancora alla macchina, lavorare per lui. Il compito successivo dello studente sarà quello di trascrivere il risultato, qualsiasi cosa sia e non importa che cosa esso significhi nel contesto problematico».

(D'Amore, 2002, p. 6)

Come si evince dai risultati delle prove INVALSI, l'interpretazione e la validazione dei risultati ottenuti da calcoli o procedure costituisce una mancanza ancora assai generalizzata nelle risoluzioni da parte degli studenti; il contratto didattico potrebbe essere ancora una delle cause delle difficoltà da parte degli allievi di mobilitare tali processi nella risoluzione dei problemi.

Nel paragrafo seguente analizzeremo le difficoltà degli studenti al termine della classe seconda della scuola secondaria di secondo grado nello svolgere task di matematica somministrati in modalità CBT.

## 6 Un esempio dalle prove INVALSI CBT

Il seguente quesito è stato somministrato nell'anno 2017 a livello nazionale agli studenti frequentanti la classe seconda della scuola secondaria di secondo grado durante la prova INVALSI. Il testo del quesito in oggetto è rappresentato nella figura seguente (Figura 4). Il campione statistico di riferimento è di oltre 16'000 studenti.

**Domanda**

**Anna ha speso:**

- presso un'edicola un quinto del denaro con cui è uscita da casa,
- in cartoleria la metà del denaro rimanente.

**Dopo i due acquisti le sono rimasti 20€.**

**Domanda 1/2**

**Qual è la quantità di denaro con cui Anna è uscita da casa?**

*Digita la risposta alla domanda.*

**Risposta:**  €

Figura 4  
Quesito CBT, Prova  
INVALSI 2017, Grado 10.

Per rispondere a questa domanda gli allievi devono utilizzare conoscenze di base (frazioni, percentuali) oppure individuare un'equazione che consenta di risolvere il problema collegando fra loro le informazioni presenti nel testo e la loro rappresentazione linguistica (in particolare interpretando la frase "la metà del denaro rimanente"). La risposta corretta è 50. La **Tabella 1** riporta i risultati in riferimento al campione statistico.

**Tabella 1**  
Numero e percentuali di risposte del campione nazionale al quesito della prova INVALSI CBT 2017, Grado 10.

Risposte corrette	6459	39,2%
Risposte errate	8639	52,4%
Risposte mancate	1391	8,4%

Come esplicitato nell'analisi condotta in Ferretti, Gambini e Tiralongo (in press), i principali errori riscontrati a livello nazionale possono essere raggruppati in due categorie, che a loro volta possono essere riconducibili a due principali strategie risolutive:

- impostare e risolvere un'equazione;
- partire dal risultato e ripercorrere all'indietro il procedimento.

Dall'analisi delle risposte emerge come alcuni studenti (poco meno di 800, circa il 5% del totale) abbiano incontrato difficoltà a impostare l'equazione, mentre altri (circa il 3%) abbiano impostato correttamente l'equazione, sbagliando poi la risoluzione. Inquadrandolo le difficoltà nel ciclo della matematizzazione dell'OECD-PISA, nel primo caso l'errore si posiziona nel lato *formulare*, in quanto l'errore rilevato si può ricondurre a una difficoltà nella formulazione in termini matematici della situazione proposta, mentre nel secondo caso l'errore si posiziona nel lato *utilizzare*, in quanto si riferisce a difficoltà correlate alla risoluzione della procedura scelta (OECD-PISA, 2013).

Analizzando nel dettaglio le percentuali di risposte errate più frequenti, osserviamo che le principali difficoltà sono riconducibili ad altri fattori. Esaminiamo nel dettaglio le tre risposte errate più frequenti.

- 2342 studenti, ossia il 14,2% sul totale (27,1% di coloro che sbagliano) rispondono 200. Questa risposta è stata la risposta errata più frequente. Possiamo ipotizzare che gli studenti siano partiti dall'unico dato numerico in loro possesso, cioè 20 euro, lo abbiano moltiplicato per 5 e poi ancora per 2 (oppure prima per 2 e poi per 5) ottenendo 200.
- 670 studenti, ossia il 4,1% sul totale (7,8% di coloro che sbagliano) rispondono 100. Analizzando la risposta possiamo ipotizzare che in questo caso gli studenti abbiano moltiplicato 20 per 5 (o viceversa).
- 525 studenti, ossia il 3,2% sul totale (6,1% di coloro che sbagliano) rispondono 40. Analizzando la risposta possiamo ipotizzare che in questo caso gli studenti abbiano moltiplicato 20 per 2 (o viceversa).

Per quanto riguarda le risposte errate, si registrano in molti casi numeri che molto probabilmente derivano da procedure e operazioni effettuate combinando i numeri presenti nel testo del quesito. Anche in questo caso, una buona chiave di lettura delle difficoltà emerse da questo item può essere il costruito di contratto didattico: lo studente pensa che per rispondere debba utilizzare (in qualche modo) esattamente i

numeri del problema, senza preoccuparsi del ruolo che questi hanno all'interno del problema. Nello specifico, l'eseguire operazioni con i numeri a disposizione all'interno della situazione matematica si riconduce al noto effetto di contratto didattico "età del capitano" con cui si designa «la condotta di un allievo che calcola la risposta di un problema utilizzando una parte o la totalità dei numeri che sono forniti nell'enunciato, allorché questo problema non possieda una soluzione numerica» (D'Amore, 2007, p. 3).

Possiamo infine notare che la risposta 40 (come tutte quelle che portano a un risultato inferiore a 40) è assurda rispetto al contesto, perché 40 erano gli euro rimasti dopo la prima spesa, quindi uscendo di casa Anna ne aveva sicuramente di più. In questo caso lo studente potrebbe non essersi preoccupato di verificare la verosimiglianza del risultato; in tal caso le difficoltà rilevate si posizionano ancora una volta sul lato *interpretare* del ciclo della matematizzazione. Gli studenti si affidano completamente al risultato del calcolo che hanno eseguito; si è ancora di fronte a ciò che viene inquadrato come una delle conseguenze dell'instaurarsi della clausola di *delega formale* (D'Amore, 2008) del contratto didattico.

## 7 Conclusioni

---

Abbracciando la visione epistemologica dell'errore di Enriques (Giovannini, 1942), l'errore è parte integrante del processo di insegnamento/apprendimento e dovrebbe diventare un elemento essenziale per permettere il superamento delle difficoltà che si frappongono all'apprendimento. Per far sì che ciò accada, è fondamentale analizzare in profondità le difficoltà emerse e ricercare le cause scatenanti gli errori. Le riflessioni presentate in questo contributo, offrono delle possibili chiavi di lettura di difficoltà emerse concernenti la risoluzione di task matematici in verticale in diversi livelli scolastici a livello nazionale. Se da un lato le diverse fasi del ciclo della matematizzazione offrono categorie di analisi che permettono di "posizionare" le difficoltà rilevate sui diversi processi messi in atto nella risoluzione di una situazione proposta all'interno di un contesto, dall'altro, alcune lenti teoriche di didattica della matematica permettono di interpretare gli errori commessi in termini di atteggiamenti legati alla concezione della matematica e ad abitudini e ripetizioni di modalità risolutive.

Nello specifico, se da un lato abbiamo avuto una quantificazione e una misurazione su larga scala di fenomeni già studiati in letteratura inquadrabili con il contratto didattico, dall'altro abbiamo nuove rilevazioni. Infatti, per quanto riguarda il quesito a risposta multipla somministrato in modalità cartacea, l'informazione interessante non è data tanto dalla bassa percentuale di risposte corrette (e quindi di scelta dell'opzione B), ma dal fatto che il 40% degli studenti che hanno svolto il test, cioè più di 220 mila studenti distribuiti sul territorio nazionale, abbia scelto l'opzione C: un errore inquadrabile secondo la letteratura con il costrutto di contratto didattico (D'Amore & Martini, 1997). Riconducibili allo stesso costrutto teorico sono anche gli errori effettuati dagli studenti della scuola secondaria di secondo grado al quesito somministrato in modalità CBT. Avendo a disposizione i dati della correzione centralizzata, si sono analizzate le risposte aperte fornite dagli studenti a livello nazionale. L'analisi combinata di testi e risultati di domande delle prove INVALSI a risposta chiusa permette di indagare non solo la percentuale di risposte corrette o

sbagliate, ma anche di quantificare gli studenti che a livello nazionale scelgono o meno un'opzione sbagliata piuttosto che un'altra. Infatti, se le basse percentuali di scelta dell'opzione corretta permettono di quantificare la presenza di una difficoltà a livello nazionale, le percentuali di scelta delle opzioni errate forniscono feedback preziosi sulle tipologie dell'errore dello studente. Per quanto riguarda le prove CBT, avere a disposizione le risposte fornite dagli studenti alle domande a risposta aperta a livello nazionale fornisce una grande quantità di dati che può fornire informazioni utili in diverse direzioni. Ricerche e studi su questi dati possono essere utilizzati dai diversi stakeholder delle istituzioni scolastiche in modo efficace per migliorare i processi di insegnamento-apprendimento. Una delle fasi fondamentali della valutazione formativa in matematica è il *formative feedback* (Black & Wiliam, 1998), che, tra le altre cose, prevede di restituire un feedback anche all'insegnante, in modo tale che possa adeguare il percorso di insegnamento. Il fatto che la maggior parte delle risposte fornite dagli studenti a determinati quesiti siano affette dal contratto didattico, fornisce piste di indagini preziose; d'altra parte, l'analisi delle risposte fornite da così tanti studenti inquadra le difficoltà più diffuse nel processo di apprendimento. Il contratto didattico permea le situazioni didattiche e, quindi, anche le pratiche valutative.

---

## Bibliografia

- Black, P., & Wiliam, D. (1998). Assessment and classroom learning. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice*, 5(1), 7-74.
- Bolondi, G. (2018). Valutare l'apprendimento della Geometria in un contesto tecnologico. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 41(6), 681-690.
- Bolondi, G., Cascella, C., & Giberti, C. (2017). Highlights on gender gap from Italian standardized assessment in mathematics. In J. Novotná & H. Moravá (Eds.), *Diversity in Mathematics Education. Proceedings of the International Symposium Elementary Maths Teaching SEMT '17*. Praga: Univerzita Karlova.
- Bolondi, G., Ferretti, F., & Giberti, C. (2018). Didactic contract as a key to interpreting gender differences in maths. *Journal of Educational, Cultural and Psychological Studies*, 18, 415-435.
- Botta, E., & Lasorsa, C. (2017). La migrazione delle prove INVALSI di Matematica da PPT a CBT. Uno studio sulle prove di pre-test per la II superiore. *Italian Journal of Educational Research*, 19, 103-120.
- Brousseau, G. (1980). Les échecs électifs dans l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. *Revue de laringologie otologie rinologie*, 101(3-4), 107-131.
- Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique et le concept de milieu: Dévolution. *Recherches en Didactique des mathématiques*, vol. 9/3. Grenoble: La pensée sauvage.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- D'Amore, B., & Martini, B. (1997). Contratto didattico, modelli mentali e modelli intuitivi nella risoluzione di problemi scolastici standard. *La matematica e la sua didattica*, 2, 150-175.

- D'Amore, B. (2002). La ricerca in didattica della matematica come epistemologia dell'apprendimento della matematica. *Scuola & Città*, 4, 56-82.
- D'Amore, B. (2007). La didattica della matematica, oggi. In I. Marazzani (A cura di), *La matematica e la sua didattica. Atti del I Convegno Nazionale* (pp. 18-24). Bologna: Pitagora.
- D'Amore, B. (2008). Epistemology, didactics of mathematics and teaching practices. *Mediterranean Journal of Research in Mathematics Education*, 7(1), 1-22.
- D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., & Sarraza, B. (2010). *Didattica della matematica alcuni effetti del "contratto"*. Bologna: Archetipo Libri.
- De Lange, J. (2007). Large-Scale Assessment and Mathematics Education. In Frank K. Lester, Jr. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 1111-1142). Charlotte: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).
- De Vleeschouwer, M., & Gueudet, G. (2011). Secondary-Tertiary transition and evolutions of didactic contract: the example of duality in Linear Algebra. In M. Pytlak, E. Swoboda & T. Rowland (Eds.), *Proceedings of CERME 7*, (pp. 1359-1368). Poland: Univ. Of Rzeszów.
- EMS-EC (Education Committee of the EMS). (2012). What are the Reciprocal Expectations between Teacher and Students? Solid Findings in Mathematics Education on Didactical Contract. *Newsletter of the European Mathematical Society*, 84, 53-55.
- Fandiño Pinilla, M. I. (2008). *Molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica*. Trento: Erickson.
- Ferretti, F., & Bolondi, G. (2019). This cannot be the result! The didactic phenomenon 'the age of the earth'. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1-14.
- Ferretti, F., Gambini, A., & Tiralongo, S. (in press). *Gli errori degli studenti in matematica: un'analisi delle risposte alle prove INVALSI di Grado 10*. In P. Falzetti (A cura di), "I dati INVALSI: uno strumento per la ricerca". Milano: FrancoAngeli.
- Ferretti, F., Giberti, C., & Lemmo, A. (2018). The Didactic Contract to Interpret Some Statistical Evidence in Mathematics Standardized Assessment Tests. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 14 (7), 2895-2906. <https://doi.org/10.29333/ejmste/90988>
- Ferretti, F., & Vannini, I. (2017). Videoanalysis and Math teachers' training. First results of a pilot course on formative assessment. *Form@re - Open Journal Per La Formazione in Rete*, 17(1), 99-119.
- Franchini, E., Lemmo, A., & Sbaragli, S. (2017). Il ruolo della comprensione del testo nel processo di matematizzazione e modellizzazione, *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, 1, 38 – 63.
- Giovannini, A., (Enriques F.) (1942). L'errore nelle matematiche. *Periodico di matematiche*, 4(22), 57-65.
- INVALSI (2018). Quadro di riferimento delle prove di INVALSI matematica. Disponibile in: [https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/QdR\\_MATEMATICA.pdf](https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/QdR_MATEMATICA.pdf) (consultato il 13.02.2020).
- MIUR (2007). Gli assi culturali. Disponibile in: [https://archivio.pubblica.istruzione.it/normativa/2007/allegati/all1\\_dm139new.pdf](https://archivio.pubblica.istruzione.it/normativa/2007/allegati/all1_dm139new.pdf) (consultato il 13.02.2020).

MIUR (2010a). *Indicazioni nazionali per i licei*. Rome: Author. Disponibile in: [http://www.indire.it/lucabas/lkmw\\_file/licei2010/indicazioni\\_nuovo\\_impaginato/decreto\\_indicazioni\\_nazionali.pdf](http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010/indicazioni_nuovo_impaginato/decreto_indicazioni_nazionali.pdf) (consultato il 13.02.2020).

MIUR (2010b). Linee guida per il passaggio al nuovo orientamento. Istituti tecnici. Rome: Author. Disponibile in: [http://www.indire.it/lucabas/lkmw\\_file/nuovi\\_tecnici/INDIC\\_GUIDA\\_TECNICI\\_.pdf](http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/nuovi_tecnici/INDIC_GUIDA_TECNICI_.pdf) (consultato il 13.02.2020).

MIUR (2010c). Linee guida per il passaggio al nuovo orientamento. Istituti professionali. Rome: Author. Disponibile in: [http://www.indire.it/lucabas/lkmw\\_file/nuovi\\_professionali/linee\\_guida/LINEE%20GUIDA%20ISTITUTI%20%20PROFESSIONALI\\_.pdf](http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/nuovi_professionali/linee_guida/LINEE%20GUIDA%20ISTITUTI%20%20PROFESSIONALI_.pdf) (consultato il 13.02.2020).

MIUR (2012). *Indicazioni nazionali per il curriculum della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione*. Rome: Author.

OECD (2013). *PISA 2012 - Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*. Paris: OECD Publishing. *PISA 2012, Quadro di Riferimento analitico per la Matematica, la Lettura, le Scienze, il Problem Solving e la Financial Literacy*. Disponibile in: <https://www.invalsi.it/invalsi/ri/pisa2012/documenti/Matematica.pdf> (consultato il 13.02.2020).

Pozio, S., & Bolondi, G. (2019). Difficulties in algebraically formulating a geometric situation: data from a large-scale assessment. *Proceedings of the 43rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Pretoria, South Africa: PME.

Sarraza, B. (1995). Le contrat didactique. *Revue Française de Pédagogie*, 112. 85-118. [Tr. it: La matematica e la sua didattica, 2, 1998, 132-175].

Sbaragli, S., & Franchini, E. (2014). *Valutazione didattica delle prove standardizzate di matematica di quarta elementare*. Locarno: Dipartimento Formazione e Apprendimento. Disponibile in: [https://m4.ti.ch/fileadmin/DECS/DS/documenti/pubblicazioni/ricerca\\_educativa/2014-Valutazione\\_didattica\\_delle\\_prova\\_standardizzate\\_di\\_matematica\\_della\\_quarta.pdf](https://m4.ti.ch/fileadmin/DECS/DS/documenti/pubblicazioni/ricerca_educativa/2014-Valutazione_didattica_delle_prova_standardizzate_di_matematica_della_quarta.pdf) (consultato il 13.02.2020).

Schoenfeld, A. H. (1987). What's all the fuss about metacognition? In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education*, (pp. 189-215). Londra: Lawrence Erlbaum Ass.

Scriven, M. (1967). The methodology of evaluation. In R. E. Tyler, R. M. Gagnè & M. Scriven (Eds.), *Perspective of curriculum evaluation*. Chicago: AERA Monograph Series in Education.

Vannini, I. (2009). *La Qualità nella didattica*. Trento: Erickson.

Vertecchi, B. (1976). *Valutazione formativa*. Torino: Loescher.

---

### **Autrice/Federica Ferretti**

Facoltà di Scienze della Formazione, Libera Università di Bolzano – Italia  
[federica.ferretti@unibz.it](mailto:federica.ferretti@unibz.it)